数学研究及评论

Mathematical Research with Reviews

Issue 3 (2020) Art.1

Sun, Xiaotao (孙笑涛)

Frobenius morphism and semi-stable bundles

Algebraic geometry in East Asia—Seoul 2008, 161–182,

Adv. Stud. Pure Math., 60, Math. Soc. Japan, Tokyo, 2010.

评论员：李灵光 (同济大学，上海)

收稿日期：2020年7月5日

设k是特征为$p > 0$的代数闭域，X是n维光滑射影k代数簇，$F_X : X \to X$是X的绝对Frobenius态射，$F : X \to X_1 := X \times_k k$是$k$上的相对Frobenius态射。研究几何对象在Frobenius态射作用下的性质具有重要意义，作者在本文中主要研究Frobenius拉回层和Frobenius正向层的稳定性以及不稳定性的刻画。

设X是n维光滑射影k代数簇，H是X上的丰富除子，$\mathscr{E}$是X上的无挠凝聚层，有理数$\mu(\mathscr{E}) := \frac{c_1(\mathscr{E})\cdot H^{n-1}}{\mathrm{rk}(\mathscr{E})}$称为$\mathscr{E}$相对于$H$的斜率。若对任意满足$\mathrm{rk}(\mathscr{F}) < \mathrm{rk}(\mathscr{E})$的非零凝聚子层$\mathscr{F} \subsetneq \mathscr{E}$, 都有$\mu(\mathscr{F}) < (\leq)\mu(\mathscr{E})$，则称$\mathscr{E}$是相对于$H$的(半)稳定层。G. Harder和M. S. Narasimhan[2]证明任意无挠凝聚层$\mathscr{E}$都存在唯一凝聚子层滤链： $\mathrm{HN}_\bullet(\mathscr{E}) : 0 = \mathrm{HN}_0(\mathscr{E}) \subset \mathrm{HN}_1(\mathscr{E}) \subset \cdots \subset \mathrm{HN}_{m-1}(\mathscr{E}) \subset \mathrm{HN}_m(\mathscr{E}) = \mathscr{E}$, 满足$gr_i^{\mathrm{HN}}(\mathscr{E}) = \mathrm{HN}_i(\mathscr{E})/\mathrm{HN}_{i-1}(\mathscr{E})$ $(1 \leq i \leq m)$ 都是半稳定层，并且$\mu(gr_1^{\mathrm{HN}}(\mathscr{E})) > \mu(gr_2^{\mathrm{HN}}(\mathscr{E})) > \cdots > \mu(gr_{m-1}^{\mathrm{HN}}(\mathscr{E})) > \mu(gr_m^{\mathrm{HN}}(\mathscr{E}))$. 记$\mu_{\max}(\mathscr{E}) = \mu(\mathrm{HN}_1(\mathscr{E}))$, $\mu_{\min}(\mathscr{E}) = \mu(gr_m^{\mathrm{HN}}(\mathscr{E}))$, 并将有理数$\mathrm{I}(\mathscr{E}) := \mu_{\max}(\mathscr{E}) - \mu_{\min}(\mathscr{E})$ 定义为$\mathscr{E}$的不稳定性。$\mathrm{I}(\mathscr{E}) = 0$当且仅当$\mathscr{E}$是半稳定层，故有理数$\mathrm{I}(\mathscr{E})$是可以衡量无挠层$\mathscr{E}$离半稳定层有多远的数值指标。A. Langer[8]引入数值不变量：$L_{\max}(\mathscr{E}) := \lim\limits_{m\to\infty} \frac{\mu_{\max}(F_X^{m*}\mathscr{E})}{p^m}$, $L_{\min}(\mathscr{E}) := \lim\limits_{m\to\infty} \frac{\mu_{\min}(F_X^{m*}\mathscr{E})}{p^m}$ 并证明其极限的存在性。

关于Frobenius拉回层的稳定性的研究。D. Gieseker[1]首先提出反例，证明在一般情况下(半)稳定层在Frobenius拉回作用下并不一定保持(半)稳定性。在有些情形下，层的(半)稳定性在Frobenius拉回作用下能够保持(半)稳定性。V. Mehta, A. Ramanathan[10] 证明若n维光滑射影代数簇X满足$\mu_{\max}(\Omega_X^1) \leq 0$, 则任意半稳定层的Frobenius拉回层都是半稳定层，若$\mu_{\max}(\Omega_X^1) < 0$, 则任意稳定层的Frobenius拉回层都是稳定层。很多类光滑射影代数簇都满足条件$\mu_{\max}(\Omega_X^1)$ ≤ 0, 其中包括有理曲线，椭圆曲线，齐性空间，射影空间，Abel簇，环簇等。

作者在本文中研究了Frobenius拉回层的稳定性以及不稳定性的刻画。设X是正特征代数闭域上亏格为g的光滑射影k代数曲线，$\mathscr{E}$是X上的向量丛，作者利用$\mathrm{I}(\mathscr{E})$和$\mu(\Omega_X^1)$的线性组合给出了Frobenius拉回层$F^*(\mathscr{E})$的不稳定性$\mathrm{I}(F^*(\mathscr{E}))$的上界估计(定理3.4)。设$X$是正特征代数闭域上的$n$维光滑射影代数簇，$H$是$X$上的丰富除子，若$\mu_{\max}(\Omega_X^1) > 0$, 则对$X$上任意秩为$r$的无挠层$\mathscr{E}$, 都有$\mathrm{I}(F^*(\mathscr{E}))$ $\leq (r-1)(L_{\max}(\Omega_X^1) + \mathrm{I}(\mathscr{E}))$(定理3.12)。

关于Frobenius正向层的稳定性的研究。R. Hartshorne[3]证明了正特征代数闭域上射影空间上的任意可逆层的Frobenius正像层都可分裂成可逆层的直和，由此容易导出Frobenius推出作用不一定保持(半)稳定性。另一方面，与Frobenius拉回作用类似，在很多情形下，(半)稳定层在Frobenius推出作用下确实能够保持(半)稳定性。H. Lange 和C. Pauly[7]证明正特征代数闭域上亏格$g(X) \geq 2$的光滑射影代数曲线X上的任意可逆层的Frobenius正像层都是稳定层。V. Mehta和C. Pauly[9]证明正特征代数闭域上亏格$g(X) \geq 2$的光滑射影代数曲线X上的任意半稳定层的Frobenius正像层都是半稳定层，但并未能证明Frobenius推出作用是否能够保持层的稳定性。作者在文[11]中利用典范滤链的方法推广了[7]和[9]中的结果，完全解决了正特征代数闭域上光滑射影代数曲线上(半)稳定层在Frobenius推出作用下的(半)稳定性保持问题。他证明了正特征代数闭域上亏格$g(X)$ ≥ 1的光滑射影代数曲线X上任意半稳定层的Frobenius正像层都是半稳定层，并且若亏格$g(X) \geq 2$, 则任意稳定层的Frobenius正像层都是稳定层。若X是n维光滑射影代数簇，作者在文[11]中给出了Frobenius正向层不稳定性$\mathrm{I}(F_{X*}(\mathscr{E}))$ 的刻画，他证明若$\mu(\Omega_X^1) \geq 0$, 则 $\mathrm{I}(F_{X*}(\mathscr{E})) \leq p^{n-1} \cdot \mathrm{rk}(\mathscr{E}) \cdot \max\{\mathrm{I}(\mathscr{E} \otimes_{\mathscr{O}_X} \mathrm{T}^l(\Omega_X^1)) \,|\, 0 \leq l \leq n(p-1)\}$, 其中$\mathrm{T}^l(\Omega_X^1)$是由一般线性群的某种表示得到的向量丛(参见[11])。进一步，若$\mathscr{E} \otimes_{\mathscr{O}_X} \mathrm{T}^l(\Omega_X^1)(0 \leq l \leq n(p-1))$都是稳定层，则Frobenius正像层$F_{X*}(\mathscr{E})$也是稳定层。

作者在本文中研究了某些特殊Frobenius正向层的稳定性。设X是正特征代数闭域k上的n维光滑射影代数簇，H是X 上的丰富除子，若$\mu_{\max}(\Omega_X^1) > 0$, $\mathrm{T}^l(\Omega_X^1)$ $(1 \leq l \leq n(p-1))$都是半稳定层，作者证明对X上任意可逆层$\mathscr{L}$, Frobenius正向层$F_*(\mathscr{L})$和局部正合微分层B_X^1都是稳定层(定理4.7)，推广了[4]的结论。

在代数曲面情形，Y. Kitadai和H. Sumihiro[5, 6] 证明若余切层Ω_X^1是半稳定层并且$\mu(\Omega_X^1) > 0$，则对任意可逆层$\mathscr{L} \in \mathrm{Pic}(X)$，$F_{X*}(\mathscr{L} \otimes_{\mathscr{O}_X} \Omega_X^1)$都是半稳定层。作者推广了Y. Kitadai和H. Sumihiro的结论，证明若X是光滑射影代数曲面，余切层Ω_X^1是满足$\mu(\Omega_X^1) > 0$的半稳定层(resp. 稳定层)，则对任意可逆层$\mathscr{L} \in \mathrm{Pic}(X)$，$F_*(\Omega_X^1 \otimes \mathscr{L})$是半稳定层(resp. 稳定层)(定理4.9)。

References

[1] D. Gieseker: Stable vector bundles and the Frobenius morphism. *Ann. École Norm. Sup.* 6 (1973), 95–101.

[2] G. Harder, M. S. Narasimhan: On the cohomology groups of moduli spaces of vector bundles on curves. *Math. Ann.* 212 (1975), 215-248.

[3] R. Hartshorne: *Ample Subvarieties of Algebraic Varieties.* Lecture Notes in Mathematics 156, Springer Verlag, Berlin (1970).

[4] K. Joshi: Stability and locally exact differentials on a curve. *Comptes rendus. Mathématique*, 338 (2004), no. 11, 869–872.

[5] Y. Kitadai, H. Sumihiro: Canonical filtrations and stability of direct images by Frobenius morphisms. *Tohoku Math J.* 60 (2) (2008), 287–301.

[6] Y. Kitadai, H. Sumihiro: Canonical filtrations and stability of direct images by Frobenius morphisms II. *Hiroshima Math. J.* 38 (2) (2008), 243–261.

[7] H. Lange, C. Pauly: On Frobenius-destabilized rank-2 vector bundles over curves. *Comment. Math. Helv.* 83 (2008), no. 1, 179–209.

[8] A. Langer: Semistable sheaves in positive characteristic. *Ann. of Math.* (2) 159 (2004), 251–276; Addendum, *Ann. of Math.* 160 (2004), 1211–1213.

[9] V. Mehta, C. Pauly: Semistability of Frobenius direct images over curves. *Bull. Soc. Math. France.* 135 (2007), no. 1, 105–117.

[10] V. Mehta, A. Ramanathan: Homogeneous bundles in characteristic p. in: *Algebraic Geometry–Open Problems* (Ravello, 1982), Lecture Notes in Math. 997 (1983), 315–320.

[11] X. Sun: Direct images of bundles under Frobenius morphisms. *Invent. Math.* 173 (2008), no. 2, 427–447.