数学研究及评论
Mathematical Research with Reviews
Issue 2 (2020) Art.8

Liu, Wanmin (柳万民)
Bayer-Macrì decomposition on Bridgeland moduli spaces over surfaces
Kyoto J. Math. 58 (2018), no. 3, 595–621.

评论员：李纯毅 (University of Warwick, Coventry, UK)
收稿日期：2020年6月20日

线性三角范畴(k-linear triangulated cateogry)上精细结构(stability condition)的定义和基本性质是在2002年左右由Tom Bridgeland 在 [Bri07]中给出的。概念启发自理论物理中的Π-stability, 见 [Dou02, AD02], 不同点是精细结构有着严格且简洁的数学定义。

精细结构可以看作是许多已有概念的自然推广，其中之一是推广了凝聚层范畴(Coh(X))上无扭层(torsion-free sheaf)的斜率稳定性(slope stability)和Mumford–Gieseker稳定性的概念；也类比得推广了矢图(quiver)上的赋范稳定性(King stability)的概念。另一方面笔者认为更深刻的，是精细结以赋值切片范畴(slicing)的概念构推广了三角范畴上的t-structure的概念。所谓切片范畴实际上是一种更精细的t-structure, 这其中蕴含的范畴本身的信息是要更丰富和深刻的。基于此点，笔者更倾向于将stability condition翻译为‘精细结构’，而不是直译为‘稳定性条件’。

给定一个线性三角范畴$\mathcal{T}$, 当$\mathcal{T}$上存在精细结构时，它的所有的精细结构组成的集合（这里记为Stab($\mathcal{T}$)）上有一个自然定义的复流形的结构。Stab($\mathcal{T}$)由定义

有一个到$\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(K_0(\mathcal{T}),\mathbb{C})$的自然映射，一个精妙的事实是这个映射是局部一一对应的。Stab($\mathcal{T}$)上复流形的局部坐标卡也由此映射给出，特别的，Stab($\mathcal{T}$)的复维数是numerical Grothendieck群$K_0(\mathcal{T})$的秩。

Bridgeland最初引入精细结构并对其全空间Stab($\mathcal{T}$)进行研究的一个重要动机来源于镜像对称假说(mirror symmetry). 更具体的讲，当$\mathcal{T}$是一个单连通卡拉比–丘簇X的导出范畴$D^b(X)$的时候，期待Stab($\mathcal{T}$)模掉若干自同构后应该自然同胚于X的镜像的hyper Stringy Kahler space. 但这个叙述中有些概念是并不明确的，一个相应的在数学上严谨表述的猜想是：Stab($\mathcal{T}$)的一个主连通空间Stab†($\mathcal{T}$)应该在$D^b(X)$的自同构群$\mathrm{Aut}(D^b(X))$作用下被保持，并且Stab†($\mathcal{T}$)是单连通的。这个猜想的重要推论是$\mathrm{Aut}(D^b(X))$是由标准自同构生成的。由于技术上的原因，这个优雅且深刻的原始猜想很难被一蹴而就得攻克，截至目前，这个猜想只有在某些K3曲面的例子时被解决了，详见 [BB17].

但是无心插柳柳成荫，精细结构在代数几何和表示论等众多分支中产生了重要应用。其中之一便是通过研究在Stab($\mathcal{T}$)上的穿屏(wall-crossing)现象来理解曲面上的层的模空间(moduli space of sheaves on surfaces)的双有理极小模型(minimum model program). 本文的内容即属于这一细分领域，此领域早期重要人物一批集中于2007年左右犹他大学Arron Bertram带领的小组，以Arend Bayer和Emanuele Macrì为代表；另外一批集中于日本，以户田幸伸(Toda, Yukinobu)和吉冈康太(Yoshioka, Kota)为代表。就入门了解而言，笔者推荐一篇佳作 [ABCH13].

以下笔者将对本文内容做简述，为此我们先确定一些记号：记S为一个光滑的复射影代数曲面，记$\mathrm{Stab}(S)$为S的凝聚层范畴的有界导出范畴$D^b(S)$ (bounded derived category of coherent sheaves)上的所有精细结构构成的复流形。取定一个$K_0(S)$中的一个特征类w, 对于任意一个精细结构σ, 我们有一个粗模空间$\mathfrak{M}_\sigma(w)$, 它参数化了所有被包含在一个切片子范畴并且特征类是w的所有objects. 当σ在$\mathrm{Stab}(S)$上变动的时候，切片子范畴是随之变动的，因此对应的$\mathfrak{M}_\sigma(w)$也可能会随之变动。$\mathfrak{M}_\sigma(w)$的变动方式并不是连续的，而是满足所谓的屏室现象(wall and chamber structure)：整个复流形$\mathrm{Stab}(S)$实余维数1的若干屏风(wall)分割成了隔室(chamber)，在每个隔室中$\mathfrak{M}_\sigma(w)$是不变的，尽管在隔室上$\mathfrak{M}_\sigma(w)$的行为可能会非常复杂，但如果比较两个相邻隔室的$\mathfrak{M}_\sigma(w)$, 在很多情况下人们发现它们是双有理等价的。一般称此现象为穿屏现象。更进一步的，当特征类w的秩满足$\mathrm{rk}(w)>0$时，有一个隔室的$\mathfrak{M}_\sigma(w)$与经典意义下的Gieseker–Mumford稳定层的模空间$\mathfrak{M}_{\mathrm{GM}}(w)$是同构的。基

于此，人们获得了通过$\mathrm{Stab}(S)$的穿屏现象来刻画$\mathfrak{M}_{\mathrm{GM}}(w)$双有理极小模型的理论基础。

这项理论在一些情况下已经被严格证明并深入研究。其中最著名的是在K3曲面的情况下，文 [BM14a,BM14b]的作者们构造了$\mathfrak{M}_\sigma(w)$上的一个丰沛线丛类(ample class)，使得粗模空间$\mathfrak{M}_\sigma(w)$成为了更有意义的复射影代数簇。当σ在$\mathrm{Stab}^\dagger(S)$上并且不落在屏风上时，所有的$\mathfrak{M}_\sigma(w)$均双有理等价，它们的Neron–Severi群也全部互相同构。（注：这里在的同构实际上是自然的，在 [BM14a]中主结论的叙述中使用了这个事实但未给予证明，对于这个小纰漏的补充证明将会由 [BM14a]的作者在日后出版的有关精细结构更系统的书籍中给出）综上，我们得到一个分段连续的函数：

$$\ell : \mathrm{Stab}^\dagger(S) \to \mathrm{NS}(\mathfrak{M}_{\mathrm{GM}}(w)).$$

[BM14a]进一步证明了此函数的相映满$\mathfrak{M}_{\mathrm{GM}}(w)$的movable cone以及big cone的交，并且将Gieseker–Mumford隔室映满$\mathfrak{M}_{\mathrm{GM}}(w)$的ample cone.

这个关于K3曲面的结论对其他曲面也是部分成立的，虽然一般情况下ℓ并没有定义，但Gieseker–Mumford隔室存在，并且当σ在此隔室时，$\mathfrak{M}_{\mathrm{GM}}(w) \cong \mathfrak{M}_\sigma(w)$. 特别的，通过准确的给出$\ell$的表达式，人们可以在很多例子中计算出$\mathfrak{M}_{\mathrm{GM}}(w)$的ample cone的边界，也即nef boundary. 本文的工作即是沿着这个方向进行，本文给出了ℓ详细的表达式。作为更具体的例子，本文考虑了一些特殊曲面上$w = (1, 0, -n)$的情况。此时对应的模空间为曲面的Hilbert scheme. 基于之前的表达式，文章计算了这些曲面的Hilbert scheme的nef boundary.

References

[ABCH13] Daniele Arcara, Aaron Bertram, Izzet Coskun, and Jack Huizenga. The minimal model program for the Hilbert scheme of points on $\mathbb{P}^2$ and Bridgeland stability. *Adv. Math.*, 235:580–626, 2013, arXiv:1203.0316.

[AD02] Paul S. Aspinwall and Michael R. Douglas. D-brane stability and monodromy. *J. High Energy Phys.*, 5(5):no. 31, 35, 2002, arXiv:hep-th/0110071.

[BB17] Arend Bayer and Tom Bridgeland. Derived automorphism groups of K3 surfaces of Picard rank 1. *Duke Math. J.*, 166(1):75–124, 2017.

[BM14a] Arend Bayer and Emanuele Macrì. MMP for moduli of sheaves on K3s via wall-crossing: nef and movable cones, Lagrangian fibrations. *Invent. Math.*, 198(3):505–590, 2014, arXiv:1301.6968.

[BM14b] Arend Bayer and Emanuele Macrì. Projectivity and birational geometry of Bridgeland moduli spaces. *J. Amer. Math. Soc.*, 27(3):707–752, 2014, arXiv:1203.4613.

[Bri07] Tom Bridgeland. Stability conditions on triangulated categories. *Ann. of Math. (2)*, 166(2):317–345, 2007, arXiv:math/0212237.

[Dou02] Michael R. Douglas. Dirichlet branes, homological mirror symmetry, and stability. In *Proceedings of the International Congress of Mathematicians, Vol. III (Beijing, 2002)*, pages 395–408, Beijing, 2002. Higher Ed. Press, arXiv:math/0207021.