数学研究及评论
Mathematical Research with Reviews
Issue 2 (2020) Art.7

Wang, Penghui (王鹏辉); Zhao, Chong (赵翀)
Essentially normal homogeneous quotient modules on the polydisc
Adv. Math. 339 (2018), 404–425.

评论员：朱森华 (大连理工大学, 大连)
收稿日期：2020年6月19日

令$\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ 表示复平面 $\mathbb{C}$ 上的开单位圆盘, $\mathbb{D}^d$ 表示 $\mathbb{C}^d$ 上的多元盘, $\mathbb{T}^d = \{z = (z_1, \ldots, z_d) : |z_i| = 1\}$ 表示 $\mathbb{D}^d$ 的特征边界, $\mathbf{B}_d$ 表示 $\mathbb{C}^d$ 上的单位球, $\mathbb{C}[z_1, \ldots, z_d]$ 表示多项式环. 多圆盘上的 Hardy 空间 $H^2(\mathbb{D}^d)$ 是 $\mathbb{D}^d$ 上满足

$$\|f\|^2 = \sup_{0<r<1} \int_{\mathbb{T}^d} |f(rz)|^2 dm(z) < \infty$$

的解析函数全体构成的集合, 其中 dm 表示 $\mathbb{T}^d$ 上正规化的 Haar 测度. $H^2(\mathbb{D}^d)$ 作为一个 Hilbert 空间, 在通常的乘法作用下, 在多项式环 $\mathbb{C}[z_1, \ldots, z_d]$ 上有一个自然的模结构, 因此可以看作是一个 Hilbert 模(见 [4, 12]).

$H^2(\mathbb{D}^d)$ 的一个闭子空间 M 如果在多项式环 $\mathbb{C}[z_1, \ldots, z_d]$ 的作用下是不变的, 则称 M 为子模, 称 $N = H^2(\mathbb{D}^d) \ominus M$ 为商模. 商模上的算子 S_{z_i} 定义为

$$S_{z_i} f = P_N z_i f, f \in N,$$

称为压缩移位算子, 其中 P_N 是从 $L^2(\mathbb{T}^d)$ 到 N 上的正交投影. 如果换位子 $[S_{z_i}^*, S_{z_j}], 1 \le i, j \le d$ 都是紧算子, 则称 N 是本质正规的. 除了多圆盘上的 Hardy 空间, 也可以考虑多圆盘上的 Bergman 空间 $A_s^2(\mathbb{D}^d) = A_s^2(\mathbb{D}) \otimes \ldots \otimes A_s^2(\mathbb{D})$, 其中 $A_s^2(\mathbb{D})$ 是 $\mathbb{D}$ 上满足

$$\|f\|_s^2 = \int_{\mathbb{D}} |f(z)|^2 (1 - |z|^2)^s dA(z) < \infty,$$

的解析函数全体构成的集合, 这里 $s > 0$, dA 是单位圆盘上正规化的面积测度. 假设 $I \subset \mathbb{C}[z_1, \ldots, z_d]$ 是一个理想, $[I]$ 表示由 I 生成的子模, 对应的商模记为 $[I]^{\perp}$.

Hilbert 模几何分析的一个中心问题是 Arveson 猜想: 对称 Fock 空间齐次子模是本质正规的(见 [1]). 在多圆盘 Hardy 空间 $H^2(\mathbb{D}^d)$ 中, 因为其子模都不是本质正规的, 所以只需考虑其商模的本质正规性. 因此 Arveson 猜想在多圆盘上可以表述为

如果 I 是一个齐次理想, 则 $[I]^{\perp}$ 是本质正规的.

此后, 有一系列关于本质正规的结论, 如 $H^2(\mathbb{D}^2)$ 的商模 $[z_1 - z_2]^{\perp}$ 是本质正规的, 在 [3, 15] 中, Guo, Wang 和 Bickel, Liaw 分别通过不同的方法给出了 Beurling 型商模本质正规的刻画, 在 [20] 中, Wang 给出了 $[\eta_1(z_1)-\eta_2(z_2), \ldots, \eta_{d-1}(z_{d-1})-\eta_d(z_d)]^{\perp}$ 是本质正规的刻画, 其中 $\eta_i(z_i)$ 是 $\mathbb{D}$ 上的内函数. 除本质正规外, 还可以考虑 p-本质正规(见 [17]), 更多关于多圆盘和球上的关于本质正规的结论可以参考文献 [1, 2, 5, 6, 7, 10, 11, 12, 13, 14, 16, 18, 21].

本评论的论文给出了多圆盘上 Hardy 空间和 Bergman 空间中齐次商模本质正规的刻画. 在给出其结论之前, 我们先给出一些符号和概念的定义. 假设 $I \subset \mathbb{C}[z_1, \ldots, z_d]$ 是一个理想, $Z(I)$ 表示 I 的零簇(即 I 中所有元素零点集的交集), $Z_{\mathbb{D}^d}(I) = Z(I) \cap \mathbb{D}^d$, $u \in \mathbb{C}^d$, $V_u = \mathbb{D}u$. 假设 $u_i \in \mathbb{C}^d$, 记 $V_i = \mathbb{D}u_i$, 令

$$\Lambda_i = \{i_j : |u_{i,i_j}| = 1\}.$$

条件 A. 假设 I 是一个齐次理想, $Z_{\mathbb{D}^d}(I) = \cup_{i=1}^{n} V_i$, 其中 $\{V_i\}$ 是不同的圆盘. 如果下面的条件之一成立

(1) $\Lambda_i \neq \Lambda_j, i \neq j$.

(2) 对任意的满足 $\Lambda_i \neq \Lambda_j$ 的 (i, j), 令 $\Lambda_i = \{i_1, \ldots, i_k\}$, 则

$$(u_{i,i_1}, \ldots, u_{i,i_k}) \text{ 和 } (u_{j,i_1}, \ldots, u_{j,i_k})$$

是线性无关的.

则称 I 满足 条件 A.

定义 1. 假设 $u \in \partial\mathbb{D}^d$, I 是一个齐次理想满足 $Z_{\mathbb{D}^d}(I) = V_u$. J_u 表示 $\mathbb{C}[z_1, \ldots, z_d]$ 中由 $\{\overline{u}_i z_i - \overline{u}_j z_j : i, j \in \Lambda\}$ 生成的理想, I' 表示由 I 和 J_u 生成的理想.

(1) 如果 $I' = \sqrt{I}$, 则称 I 是 quasi-prime.

(2) 如果 $\sqrt{I}/I'$ 是有限维的, 则称 I 是本质 quasi-prime.

如果 I 是(quasi-prime/本质 quasi-prime), 则称 $I^{\perp}$ 是(quasi-prime/本质 quasi-prime).

下面将给出本评论论文中最核心的结论, 在下面结论中, H 表示 $H^2(\mathbb{D}^d)$ 或者 $A_s^2(\mathbb{D}^d)$.

定理 2. *假设 $I \subset \mathbb{C}[z_1, \dots, z_d]$ 是一个齐次理想而且 $[I]^\perp$ 是无穷维的. 则 H 的商模 $[I]^\perp$ 是本质正规的当且仅当下面的条件成立,*

(1) I 满足 条件 A.

(2) 假设 $I = \cap_{j=1}^m I_{u_j}$ 是准素分解, $Z_{\mathbb{D}^d}(I_{u_j}) = V_{u_j}$, 则每个 I_{u_j} 都是本质 quasi-prime.

值得指出的是, 上述定理中的结论是第一个关于多圆盘上 Bergman 空间 $A_s^2(\mathbb{D}^d)$ 非平凡本质正规的结论.

至此, 本评论的论文完成了多圆盘上 Hardy 空间 $H^2(\mathbb{D}^d)$ 和 Bergman 空间 $A_s^2(\mathbb{D}^d)$ 中齐次商模本质正规的刻画. 但是, 多圆盘上子模的结构是比较复杂的, 除齐次子模之外, 还存在其他的子模, 如在 [22] 中, Wang 和 Zhao 给出了多圆盘上拟齐次商模本质正规的刻画. 齐次商模本质正规的重要性是因为它是 Hilbert 模几何分析中的一个重要问题, 以此为基础也可以考虑其他商模本质正规的问题. 目前对子模的认识依然是非常有限的, 因此, Hilbert 模的分类问题是一个非常值得研究的问题, 这也是一个至今依然没解决的问题, 如关于子模酉等价, 相似的研究可以参考文献 [8, 9]. 除此之外, 根据 Nagy-Foias 算子模型理论的思想(见 [19]), 多圆盘 Hardy 空间上压缩移位算子是一类非常重要的算子($C_{\cdot 0}$ 算子), 本质正规只研究了压缩移位算子换位子的性质, 对压缩移位算子的不变子空间, 约化子空间, 谱等性质的研究也是非常有意义的. 多圆盘上丰富的函数结构和算子结构依然是现在泛函分析的研究热点之一.

References

[1] W. Arveson, The Dirac operator of a commuting d-tuple, J. Funct. Anal. 189 (2002) 53-79.

[2] W. Arveson, Quotients of standard Hilbert modules, Trans. Amer. Math. Soc. 359 (2007) 6027-6055.

[3] K. Bickel, C. Liaw, Properties of Beurling-type submodules via Agler decompositions, J. Funct. Anal. 272 (2017) 83-111.

[4] X. Chen, K. Guo, Analytic Hilbert Modules, Chapman & Hall/CRC Reseach Notes in Mathematics, vol. 413, 2003.

[5] D. Clark, Restrictions of H^p functions in the polydisk, Amer. J. Math. 110 (1988) 119-1152.

[6] R. Douglas, Essentially reductive Hilbert modules, J. Operator Theory 55 (2006) 117-133.

[7] R. Douglas, Essentially reductive Hilbert modules, II, in: Hot Topics in Operator Theory, in: Theta Ser. Adv. Math., vol.9, Theta, Bucharest, 2008, pp.79-87.

[8] R. Douglas, C. Foais, Uniqueness of multivariable canocical methods, Acta Sci. Math. (Szeged) 57 (1993) 79-81.

[9] R. Douglas, K. Yan, On the rigidity of Hardy submodules, Integr. Equ. Oper. Theory 13 (1990) 350-363.

[10] R. Douglas, X. Tang, G. Yu, An analytic Grothendieck Riemann Roch theorem, Adv. Math. 294 (2016) 307-331.

[11] R. Douglas, K. Wang, A harmonic analysis approach to essential normality of principal submod-ules, J. Funct. Anal. 261 (2011) 3155-3180.

[12] R. Douglas, V. Paulsen, Hilbert modules over function algebras, Longman Research Notes 217 (1989).

[13] J. Eschmeier, M. Engliš, Geometric Arveson–Douglas conjecture, Adv. Math. 274 (2015) 606-630.

[14] Q. Fang, J. Xia, Essential normality of polynomial-generated submodules: Hardy space and beyond, J. Funct. Anal. 265 (2013) 2991-3008.

[15] K. Guo, K. Wang, Beurling type quotient modules over the bidisk and boundary representations, J. Funct. Anal. 257 (2009) 3218-3238.

[16] K. Guo, P. Wang, Essentially normal Hilbert modules and K-homology IV: quasi-homogenous quotient modules of Hardy module on the polydisks, Sci. China Math. 55(8) (2012) 1613-1626.

[17] K. Guo, K. Wang, G. Zhang, Trace formulas and p-essentially normal properties of quotient modules on the bidisk, J. Operator Theory 67 (2012) 511-535.

[18] B. Krishna Das, S. Gorai, J. Sarkar, On quotient modules of $H^2(\mathbb{D}^n)$: essential normality and boundary representations, arXiv:1410.5633.

[19] B. Sz.-Nagy, C. Foias, H. Bercovici, L. Kérchy, Harmonic Analysis of Operators on Hilbert Space, 2nd edn. Revised and enlarged edition. Universitext. Springer, New York (2010).

[20] P. Wang, The essential normality of N_η-type quotient module of Hardy module on the polydisc, Proc. Amer. Math. Soc. 142 (2014) 151-156.

[21] P. Wang, C. Zhao, Essential normality of homogeneousquotient modules over the polydisc: distin-guished variety case, Integral Equations Operator Theory 90 (2018) 13, https://doi.org /10.1007/s00020-018-2435-9.

[22] P. Wang, C. Zhao, Essential normality of quasi-homogeneous quotient modules over the polydisc. Sci. China Math. 62 (2019) 663-678.