数学研究及评论

Mathematical Research with Reviews

Issue 2 (2020) Art.5

Zou, Guang-an (邹广安)

A Galerkin finite element method for time-fractional stochastic heat equation

Comput. Math. Appl. 75 (2018), no. 11, 4135–4150.

评论员：李娅静 (西北农林科技大学, 杨凌)

收稿日期：2020年5月31日

分数阶扩散系统源于物理学、计算生物学、金融等科学领域 [1, 2, 3, 4, 5], 同时, 在科学研究中所讨论的系统往往会受到来自外部环境的不确定(随机)因素的影响, 而布朗运动型噪声作为一类重要的有色噪声, 在许多物理和社会现象的建模中自然出现. 近年来, 分数阶随机偏微分方程的理论与数值求解已经成为应用数学和科学计算领域的前沿和热点课题, 其相关工作已经取得了一定进展, 如: [6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13]. 然而, 有关分数阶随机次扩散问题的数值方法的研究还很稀少, 因此研究分数阶随机扩散系统的数值算法具有重要的理论意义和实际价值.

这篇文章考虑如下由乘性噪声驱动的时间分数阶随机热方程初边值问题:

$$\begin{cases} {}^C D_t^{\alpha} u(x,t) = \Delta u(x,t) + \sigma(u(x,t))\frac{dW(t)}{dt}, & \alpha \in (\frac{1}{2},1), \ \ x \in D, \ \ t \in (0,T], \\ u(x,0) = u_0(x), & x \in D, \ \ t = 0, \\ u(x,t) = 0, & x \in \partial D, \ \ t > 0, \end{cases} \tag{1}$$

其中, $u(x,t)$ 是随机函数, ${}^C D_t^{\alpha} u(x,t)$ 是阶为 α 的 Caputo 分数导数. D 是 $\mathbb{R}^d$ $(d = 1,2,3)$ 的有界子集, 边界记为 ∂D, 算子 Δ 是 $\mathbb{R}^d$ 上的 Laplacian 算子. σ 是实值连续函数, $W(t)$ 是一个过滤概率空间 $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P}, \mathcal{F}_{tt\geq 0})$ 上的 Wiener 过程.

文中假设可测函数 $\sigma : H \to L_2^0$ 满足全局 Lipschitz 和线性增长条件

$$\|\sigma(u) - \sigma(v)\|_{L_2^0} \leq C_\sigma \|u - v\|, \ \|\sigma(v)\|_{L_2^0} \leq C_\sigma \|v\|,$$

其中任意 $u, v \in H$, 常数 $C_\sigma > 0$. 通过利用问题 (1) 的 mild 解的如下定义:

Definition 1. 称适定过程 $\{u(t)\}_{t\geq 0}$ 为问题 (1) 的一个 mild 解, 如果它对于几乎处处的 $\omega \in \Omega$ 都几乎处处满足如下积分方程

$$u(t) = E_\alpha(t)u_0 + \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}(t-s)\sigma(u(s))dW(s),$$

其中广义的 Mittag-Leffler 算子定义为

$$E_\alpha(t) = \int_0^\infty \xi_\alpha(\theta) S(t^\alpha \theta) d\theta, E_{\alpha,\alpha}(t) = \int_0^\infty \alpha\theta\xi_\alpha(\theta) S(t^\alpha \theta) d\theta,$$

涉及的 Wright-type 函数为:

$$\xi_\alpha(\theta) = \frac{1}{\alpha}\theta^{-1-\frac{1}{\alpha}}\omega_\alpha(\theta^{-\frac{1}{\alpha}}) \geq 0, \ \alpha \in (0,1)$$

, 其中单边稳定的概率函数:

$$\omega_\alpha(\theta) = \frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^\infty (-1)^{n-1}\theta^{-n\alpha-1}\frac{\Gamma(n\alpha+1)}{n!}\sin(n\pi\alpha), \ \theta \in (0,\infty),$$

这里的 $S(t) = e^{tA}$ 是线性算子 A 生成的一个解析半群算子.

基于此定义，文中讨论并证明了方程 (1) mild 解的时间和空间的正则性, 得到了如下结果:

Theorem 2. *假设可测函数 $\sigma : H \to L_2^0$ 满足*

$$\|\sigma(u) - \sigma(v)\|_{L_2^0} \leq C_\sigma \|u - v\|, \|\sigma(v)\|_{L_2^0} \leq C_\sigma \|v\|,$$

其中 C_σ 是任意常数. 对任意 $\alpha \in (\frac{1}{2}, 1)$, $0 < \nu < 1$, 设 $u(t)$ 是 (1) 的一个 mild 解. 则存在常数 $C > 0$ 使得

$$\sup_{t\in[0,T]} \|u(t)\|^2_{L_2(\Omega,\dot{H}^\nu)} \leq C\|u_0\|^2_{L_2(\Omega,H)}.$$

$$\|u(t_2) - u(t_1)\|^2_{L_2(\Omega,\dot{H}^\nu)} \leq C(t_2 - t_1)^\beta,$$

其中 $0 \leq t_1 < t_2 \leq T$, $\beta = \max\{\nu\alpha, 2(1-\alpha), 2\alpha - 1\} > 0$.

通过在空间方向对方程 (1) 运用标准的 Galerkin 有限元方法, 得到如下半离散格式, 即寻求过程 $u_h(t) = u_h(\cdot, t) \in V_h$ 满足

$$\begin{cases} {}^C D_t^\alpha u_h(t) = A_h u_h(t) + P_h \sigma(u_h(t)) \frac{dW(t)}{dt}, \\ \\ u_h(0) = P_h u_0 = u_{h0}. \end{cases} \tag{2}$$

通过在时间方向对方程 (2) 引入 Gorenflo-Mainardi-Moretti-Paradisi (GMMP) 格式得到如下全离散格式, 即寻求一个 $\mathcal{F}_{t_n}$ 适定过程 u_h^n 满足

$$\begin{cases} \frac{1}{\tau^\alpha} \left[\sum_{k=0}^{n} \omega_k^\alpha u_h^{n-k} - b_n u_h^0 \right] = A_h u_h^n(t) + \frac{1}{\tau} \int_{t_{n-1}}^{t_n} P_h \sigma(u_h^{n-1}) dW(s), \\ \\ u_h(0) = P_h u_0. \end{cases} \tag{3}$$

文中进一步建立了此全离散格式在 L_2 范数下的误差估计.

Theorem 3. *对任意 $\alpha \in (\frac{1}{2}, 1)$, $r \in [0, 1)$, 设 u_h^n 和 $u(t_n)$ 分别是方程 (3) 和 (1) 的解. 则存在常数 $C > 0$, 使得*

$$\|u_h^n - u(t_n)\|^2_{L^2(\Omega, H)} \leq C[\tau^{2\alpha} + h^{2(1+r)}].$$

文章最后给出了一个数值例子验证了理论分析的正确性. 除此以外, 作者亦对后续可能的工作方向做出了诠释, 首先可以考虑用奇异边界法处理复杂的边界条件; 另外, 作者希望对不规则域问题进行数值研究.

References

[1] W. Chen, Y. Liang, S. Hu, H. Sun, *Fractional derivative anomalous diffusion equation modeling prime number distribution*, Fract. Calc. Appl. Anal., 18 (2015), 789–798.

[2] W. Chen, G. Pang, *A new definition of fractional Laplacian with application to modeling three-dimensional nonlocal heat conduction*, J. Comput. Phys., 309 (2016), 350–367.

[3] W.H. Deng, *Numerical algorithm for the time fractional Fokker-Planck equation*, J. Comput. Phys., 227 (2007), 1510–1522.

[4] Y.Z. Povstenko, *Fractional heat conduction equation and associated thermal stress*, J. Therm. Stresses, 28 (2004), 83–102.

[5] H.M. Srivastava, J.J. Trujillo, *Theory and Applications of Fractional Differential Equations*, Elsevier, 2006.

[6] Z.Q. Chen, K.H. Kim, P. Kim, *Fractional time stochastic partial differential equations*, Stoch. Process. Appl., 125 (2015), 1470–1499.

[7] J.Q. Duan, K.N. Lv, B. Schmalfuss, *Invariant manifolds for stochastic partial differential equations*, Ann. Probab., 31 (2003), 2109–2135.

[8] M.D. Gunzburger, L.S. Hou, J. Ming, *Stochastic steady-state Navier-Stokes equations with additive random noise*, J Sci. Comput., 66 (2016), 672–691.

[9] Y. Li, Y. Wang, W. Deng, *Galerkin finite element approximations for stochastic space–time fractional wave equations*, SIAM J. Numer. Anal., 55 (6) (2017), 3173–3202.

[10] M.M. Meerschaert, A. Sikorskii, *Stochastic Models for Fractional Calculus*, De Gruyter Stud. Math. 43, Walter de Gruyter, Berlin, 2012.

[11] X.J. Wang, S.Q. Gan, J.T. Tang, *Higher order strong approximations of semilinear stochastic wave equation with additive space-time white noise*, SIAM J. Sci. Comput., 36 (2014), A2611–A2632.

[12] T. Zhou, T. Tang, *Note on coefficient matrices from stochastic Galerkin methods for random diffusion equations*, J. Comput. Phys., 229 (2010), 8225–8230.

[13] G. Zou, A. Atangana, Y. Zhou, *Error estimates of a semidiscrete finite element method for fractional stochastic diffusion-wave equations*, Numer. Methods Partial Differential Equations, 34 (2018), 1834–1848.