数学研究及评论
Mathematical Research with Reviews
Issue 2 (2020) Art.3

Cao, Guangfu (曹广福); He, Li (何丽); Zhu, Kehe (朱克和)
Fredholm composition operators and proper holomorphic mappings
Bull. Lond. Math. Soc. 51 (2019), no. 6, 1104–1112.

评论员：梁玉霞 (天津师范大学，天津)
收稿日期：2020年4月19日

众所周知，一般Banach空间之间的Fredholm算子是满足以下三个条件的有界线性算子，具体为：

Definition 1. 令X和Y为Banach空间，$T : X \to Y$为有界线性算子。如果算子T满足以下条件，则称T为Fredholm算子:

(1) 零空间$ker(T)$是有限维的；
(2) 像空间$Ran(T)$是闭集；
(3) 余核空间$Coker(T)$是有限维的。

“Fredholm算子”的研究起源于泛函分析中的根理论，与经典的Fredholm 积分理论方程有着紧密的联系，该名称的引入是为了纪念瑞典数学家“Erik Ivar Fredholm”. Fredholm算子不仅包含作用于有限维空间上的所有算子，而且包含可以表示为可逆算子加上紧算子的所有算子。许多数学家开始逐渐探究一些特殊的Fredholm算子，尤其作用于Banach空间上的复合算子为Fredholm 算子的等价刻画形成了很多系统的研究结果。

复合算子作为一类被广泛研究的线性算子，起初是在1968年被数学家 Ryff [12]和Nordgren[11]引入的。一般Banach空间X 上的复合算子通常记为$C_\varphi : X \to X$, 它是一个线性算子定义为 $C_\varphi(f) = f \circ \varphi$, 其中$\varphi$是诱导符号，$\circ$ 是函数的复合运算。关于多种解析函数空间上复合算子多种性质的系统研究结果可参阅两

本经典著作 [3, 14]及近期的相关论文 [5, 7, 8, 15, 16]等。尤其当Banach空间X为经典单位圆盘 Hardy-Hilbert空间$H^2(\mathbb{D})$时，Schwartz在他的毕业论文[13]中证明了$H^2(\mathbb{D})$上复合算子C_φ是可逆的当且仅当φ是单位圆盘上的自同构。而后，数学家Cima, Thomson和Wogen[2]合作证明了$H^2(\mathbb{D})$上只有可逆的复合算子才是Fredholm算子。综合上述研究成果可得：$H^2(\mathbb{D})$上复合算子C_φ是Fredholm算子当且仅当它是可逆的当且仅当φ 是单位圆盘上的自同构。该结果给出了作用于$H^2(\mathbb{D})$上复合算子成为Fredholm算子简洁且优美的等价刻画。基于此，数学家Kumar在[9]中给出了$L^2[0,1]$空间上有界复合算子C_T是Fredholm算子当且仅当它是可逆的。后来数学家Bourdon在[1]中给出了$H^2(\mathbb{D})$上复合算子是Fredholm算子新的证明方法。对于具有C^2边界的严格拟凸域或多圆柱或紧黎曼面或者有界域（它们统一记为$\mathcal{D}$），数学家Hatori在[6]中证明了如果区域$\mathcal{D}$满足$int\overline{\mathcal{D}}=\mathcal{D}$，其中$int$表示内部，则$\mathcal{D}$中解析函数组成的特定Banach空间上的复合算子是Fredholm算子也具有上述等价刻画。在高维复平面上，数学家MacCluer在[10]中证明了作用于$\mathbb{C}^N$中有界区域上的解析函数组成的多种Hilbert空间上复合算子是Fredholm算子，则诱导符号一定是有界区域上的自同构。近年来，数学家Galindo, Gamelin, Lindström [4]合作探究了定义在复Banach空间开单位球B_E中一致有界解析函数组成代数$H^\infty(B_E)$上复合算子是 Fredholm算子的刻画条件。此后，许多数学家开始研究从不同的角度描述作用于解析函数组成Banach空间上的Fredholm复合算子的性质。

本评论论文在上述工作基础上抽象出了具有特定性质的区域和解析函数空间，并利用自同构映射是平凡的Proper全纯映射（也叫逆紧映射）、及核函数等工具，给出了比较广泛的Hilbert空间上复合算子是Fredholm算子的等价刻画结果，是上述背景工作的推广形式。下面介绍一下评论论文的相关符号: 令H为n维复平面$\mathbb{C}_n$中有界域Ω上全纯函数组成的Hilbert空间。给定有界域Ω上的一个全纯自映射$\varphi:\Omega\to\Omega$, 定义复合算子$C_\varphi:H\to H$为 $C_\varphi f=f\circ\varphi$. 评论论文对有界域$\Omega$和Hilbert空间$H$做了以下三个一般假设：

(a) 对于每个$w\in\Omega$，赋值映射$f\to f(w)$是 H上的有界线性泛函；此时，由希尔伯特空间理论中的Riesz表示定理知存在H中唯一的函数K_w使得 $f(w)=\langle f,K_w\rangle$, 从而得到$\Omega\times\Omega$上的二元函数$K(z,w)=K_w(z)$, 通常被称为空间$H$的再生核。

(b) 记 $Aut(\Omega)$为Ω上的自同构群，假设每个$\varphi\in\mathrm{Aut}(\Omega)$都能诱导出定义在$H$上的一个有界复合算子。此时，复合算子$C_\varphi$是可逆的并且其逆算子为$C_{\varphi^{-1}}$.

(c) Ω中的点被H分隔，意味着对于Ω中任何不同的有限序列$\{a_k\}$, 有限核函数集$\{K_{a_k}\}$中的元素是线性无关的。

本评论论文在满足上述$(a)-(c)$条件的有界域Ω中全纯函数组成的Hilbert空间 H上等价给出了其上复合算子是Fredholm算子的两个等价刻画结果。该结果的证明主要基于复合算子的对偶算子在Hilbert空间核函数上的作用公式(Lemma 3)以及利用弱收敛序列对 Fredholm算子进行的等价刻画(Lemma 2)：

Lemma 2. 假设$T: H \to H$是一个有界线性算子，则T不是Fredholm算子当且仅当存在H中弱收敛到零的单位向量序列 $\{x_k\}$使得$\|Tx_k\| \to 0$或者$\|T^*x_k\| \to 0$, 当$k \to \infty$。

Lemma 3. 假设$\varphi: \Omega \to \Omega$是全纯自映射满足$C_\varphi$是$H$上有界算子，则对于任意的$w \in \Omega$成立$C_\varphi^* K_w = K_{\varphi(w)}$。

评论论文的主要定理陈述如下：

Theorem 4. 假设$\varphi: \Omega \to \Omega$ 是全纯自映射，如果当w接近Ω的边界时，成立$K(w,w) \to \infty$, 则以下条件是等价的：

(i) C_φ是H上的Fredholm算子;

(ii) C_φ是H上的可逆算子;

(iii) $\varphi \in Aut(\Omega)$.

该主要结果涵盖了很多经典Hilbert空间，比如：单位圆盘上Hardy, Bergman以及Dirichlet空间等上Fredholm复合算子的刻画结论。其的证明方法主要利用了泛函分析中的相关理论，有很大的普适性。

此外，本评论论文中的主要结果的成立依赖于假设条件：当 w接近Ω的边界时，成立$K(w,w) \to \infty$. 这个假设条件并不是对于所有满足上述$(a)-(c)$条件的有界域 Ω中全纯函数组成的Hilbert空间H都成立的。从而一般再生核Hilbert空间上复合算子是Fredholm算子的充要刻画条件有待于继续深入挖掘，是非常有意义的后续科研工作。

References

[1] P. Bourdon, Fredholm multiplication and composition operators on the Hardy space, Integral Equations Operator Theory, 13 (1990) 607-610.

[2] J. Cima, J. Thomson, W. Wogen, On some properties of composition operators, Indiana Univ. Math. J. 24 (1974) 215-220.

[3] C. Cowen and B. MacCluer, Composition operators on spaces of analytic functions, CRC Press, Boca Raton, FL, 1995.

[4] P. Galindo, T. Gamelin and M. Lindstrom, Fredholm composition operators on algebras of analytic functions on Banach spaces, J. Funct. Anal. 258 (2010) 1504-1512.

[5] K. Guo and K. Izuchi, Composition operators on Fock type spaces, Acta Sci. Math. 74 (2008) 807-828.

[6] O. Hatori, Fredholm composition operators on spaces of holomorphic functions, Integral Equation Operator Theory, 18 (1994) 202-210.

[7] M. M. Jones, Shift invariant subspaces of composition operators on H^p, Arch. Math. (Basel) 84 (3)(2005) 258-267.

[8] Y. Liang, Z. Zhou, Hypercyclic composition operators on the little Bloch space and the Besov spaces, Indag. Math. (N.S.) 29(3)(2018) 986-996.

[9] A. Kumar, Fredholm composition operators, Proc. Amer. Math. Soc. 79 (1980) 233-236.

[10] B. MacCluer, Fredholm composition operators, Proc. Amer. Math. Soc. 125 (1997) 163-166.

[11] E. A. Nordgren, Composition operators, Can. J. Math., 20(1968) 442-449.

[12] J. Ryff, Subordinate H^p function, Duke Math. J. 33 (1968) 347-354.

[13] H. J. Schwartz, Composition Operators on H^p, Thesis, Univ. of Toledo, Toledo, Ohio, 1969.

[14] J. H. Shapiro, Composition operators and classical function theory, Springer, New York, 1993.

[15] M. Tjani, Compact composition operators on Besov spaces, Trans. Amer. Math. Soc. 355 (2003) 4683-4698.

[16] H. Wulan, D. Zheng, K. Zhu, Compact compostion operators on $BMOA$ and the Bloch space. Proc. Am. Math. Soc. 137 (2009) 3861-3868.