

数学研究及评论

Mathematical Research with Reviews

Issue 2 (2020) Art.2

© Prior Science Publishing

Xiao, Jie (肖杰); Xu, Wen (徐文)

Composition operators between analytic Campanato spaces

J. Geom. Anal. 24 (2014), no. 2, 649–666.

评论员：刘军明 (广东工业大学, 广州)

收稿日期：2020年4月9日

美国数学家 Ch. Morrey 于 1938 年首次引入 Morrey 空间(见[10]). 实 Morrey 空间在偏微分方程等领域具有重要的应用. 例如: 袁文和杨大春等人在 [23] 研究了 Besov-Morrey 空间的紧嵌入问题和相关的子空间问题. 在 Besov-Morrey 空间方面, 林钦诚和杨奇祥在 [4] 中给出了 Besov-Morrey 空间的半群刻画, 且研究了相应的广义 Navier-Stokes 方程. 国外学者 Rosenthal 在 [11] 中研究了 Besov-Morrey 空间的小波理论. Mazzucato 和 Sawano 在 [7] 中研究了一些函数理论性质及其应用. 苗长兴等人研究了相关弱 Morrey 空间(见[9]). 对于实 Morrey 空间更多的理论发展, 可以进一步参考书籍 [22].

实 Morrey 空间的研究成果较多, 但解析的 Morrey 空间的成果较少. 吴志坚和谢春平于 2003 年首次研究了复解析 Morrey 空间(见[18]). 此后近十年, 在解析的 Morrey 空间上没有什么进展. 本评论论文中, 肖杰和徐文首次研究了解析 Morrey 空间 $\mathcal{L}^{2,\lambda}(\mathbb{D})$ ($0 \leq \lambda \leq 2$) 之间的复合算子的有界性和紧性问题.

具体而言, 设 \mathbb{D} 复平面上的单位圆盘, $H(\mathbb{D})$ 表示 \mathbb{D} 上解析函数的全体. 假设 φ 为 \mathbb{D} 上的解析自映射. 假设 $0 \leq \lambda \leq 2$, 若 $f(z) \in H(\mathbb{D})$, 且满足

$$\|f\|_{\mathcal{L}^{2,\lambda}} = |f(0)| + \left(\sup_{a \in \mathbb{D}} (1 - |a|^2)^{1-\lambda} \int_{\mathbb{D}} |f'(z)|^2 (1 - |\sigma_a(z)|^2) dA(z) \right)^{1/2} < \infty,$$

其中 $dA(z) = \frac{1}{\pi} dx dy$, $\sigma_a(z) = \frac{a-z}{1-\bar{a}z}$, 我们称 f 属于解析 Morrey 空间 $\mathcal{L}^{2,\lambda}(\mathbb{D})$. 解析 Morrey 空间有时也称为解析 Campanato 空间. 本评论这里更习惯称之为解

析 Morrey 空间, 主要是对开创者 Ch. Morrey 表示敬意. 它有如下形式的等价范数

$$\|f\|_{\mathcal{L}^{2,\lambda}} = |f(0)| + \sup_{a \in \mathbb{D}} (1 - |a|^2)^{\frac{1-\lambda}{2}} \|f \circ \sigma - f(a)\|_{H^2}.$$

定义复合算子 C_φ 如下

$$C_\varphi f(z) = f(\varphi(z)), \quad z \in \mathbb{D}, f \in H(\mathbb{D}).$$

复合算子是一类重要的线性算子. 它是经典函数论中的重要研究对象, 也在动力系统, 控制论中具有重要的应用(看参考 [1] 和 [12]).

解析 Morrey 空间 $\mathcal{L}^{2,\lambda}(\mathbb{D})$ ($0 \leq \lambda \leq 2$) 是一个巴拿赫空间. 从函数空间与线性算子理论的角度来说, 一个基础性的问题是: 复合算子 C_φ 在解析 Morrey 空间上有界性, 紧性的充分必要条件是什么. 如何用诱导函数 φ 来刻画. 对于有界性, 本评论论文完全解决了该问题. 对于紧性, 他们部分解决了并留下一个公开问题.

本评论论文主要有两个结果. 第一个定理刻画了复合算子 C_φ 在解析 Morrey 空间上有界性的充分必要条件. 在证明过程主要用了三个关键步骤, 第一选取解析 Morrey 空间的合适的等价范数, 这里是用 Hardy 空间型范数(文中引理 1). 第二步, 选取合适的测试函数(文中引理 2). 第三步, 巧妙利用了一个类似于巴拿赫代数形式的不等式, 这是芬兰学者 Laitila 在解决 $BMOA$ 空间上等距复合算子问题时, 用的一个技巧. 即当 $f(0) = 0$, $\varphi(0) = 0$ 时, 有

$$\|f \circ \varphi\|_{H^2} \preceq \|f\|_{H^2} \|\varphi\|_{H^2}.$$

第二个定理部分刻画了复合算子 C_φ 在解析 Morrey 空间上紧性. 必要性部分: 如果 C_φ 是紧的, 可以选择合适的测试函数得出相应的必要条件. 但是在充分性部分, 非常困难. 在所证明的部分指标成立时, 就用到了很多技巧, 包括计数函数, Carleson 测度不等式等. 困难的主要原因是解析 Morrey 空间的独特性, 它既不是希尔伯特空间, 也不是自反空间, 而且它的前对偶空间非常复杂. 所能借鉴的计算技巧有限, 需要发展全新的方法.

总之, 本评论论文, 为解析 Morrey 空间的研究起了很大的启发作用, 推动了这个研究方向的发展. 许多后续工作围绕此工作展开. 下面是一些后续的工作.

此后, 肖杰和袁程也在 [20] 做了进一步的研究并且得到了一般 Morrey 空间 $\mathcal{L}^{p,\lambda}(\mathbb{D})$ 的一些刻画. 乌兰哈斯和周继振于 2013 年在 [19] 中给出了 Morrey 型空间的刻画, 同时也得到了 Morrey 型空间与 Q_K 空间的关系. 王建飞与肖杰合作得到了 Morrey-Campanato 空间上的算子理论以及高维的 Morrey-Campanato 相关理论 [15], [16], [17]. 李澎涛, 刘军明, 娄增建 [3] 研究了解析 Morrey 空间上的积分算子理论. 卓征渊和叶善力建立了从解析 Morrey 空间到 Bloch 空间

上的积分算子理论. 施业成和李颂孝 [13] 研究了积分算子的本性范数. 另外在解析 Morrey 空间上的嵌入定理, 插值定理方面也有一些研究, 见 [5] 和 [6], [14]. 袁程在 Campanato 型空间方面, 得到了一些新刻画 [21]. P. Galanopoulos, N. Merchán 和 A. Siskakis [2] 研究了一类 Dirichlet Morrey 空间. N. Merchán 在其博士论文 [8] 中系统研究了解析 Morrey 空间中复合算子半群理论以及缺项级数等. 初学者若是对解析 Morrey 空间感兴趣, 可参考学位论文 [24].

REFERENCES

- [1] P. Bourdon, J. Shapiro, *Cyclic phenomena for composition operators*, Mem. Amer. Math. Soc. 125 (1997), no. 596.
- [2] P. Galanopoulos, N. Merchán, A. Siskakis, *A family of Dirichlet-Morrey spaces*, Complex Var. Elliptic Equ. 64 (2019), no. 10, 1686-1702.
- [3] P. Li, J. Liu, Z. Lou, *Integral operators on analytic Morrey spaces*, Sci. China Math. 57 (2014), no. 9, 1961-1974.
- [4] C. Lin and Q. Yang, *Semigroup characterization of Besov type Morrey spaces and well-posedness of generalized Navier-Stokes equations*, J. Differential Equations **254**(2013), no. 2, 804-846.
- [5] J. Liu, Z. Lou, *Carleson measure for analytic Morrey spaces*, Nonlinear Anal. 125 (2015), 423-432.
- [6] J. Liu, Z. Lou, *Properties of analytic Morrey spaces and applications*, Math. Nachr. 288 (2015), no. 14-15, 1673-1693.
- [7] A. Mazzucato, *Besov-Morrey spaces: function space theory and applications to non-linear PDE*, Trans. Amer. Math. Soc. **355**(2003), no. 4, 1297-1364.
- [8] N. Merchán, *Spaces of analytic functions and operators between them*, 2018, Thesis, Universidad de Málaga.
- [9] C. Miao and B. Yuan, *Weak Morrey spaces and strong solutions to the Navier-Stokes equations*, Sci. China Ser. A **50**(2007), no. 10, 1401-1417.
- [10] Ch. Morrey, *On the solutions of quasi-linear elliptic partial differential equations*, Trans. Amer. Math. Soc. **43**(1938), no. 1, 126-166.
- [11] M. Rosenthal, *Local means, wavelet bases and wavelet isomorphisms in Besov-Morrey and Triebel-Lizorkin-Morrey spaces*, Math. Nachr. **286**(2013), no. 1, 59-87.
- [12] J. Shapiro, *Composition operators and classical function theory*, Universitext: Tracts in Mathematics. Springer-Verlag, New York, 1993.
- [13] Y. Shi, S. Li, *Essential norm of integral operators on Morrey type spaces*, Math. Inequal. Appl. 19 (2016), no. 1, 385-393.
- [14] J. Wang, *The Carleson measure problem between analytic Morrey spaces*, Canad. Math. Bull. 59 (2016), no. 4, 878-890.
- [15] J. Wang, J. Xiao, *Holomorphic Campanato spaces on the unit ball*, Math. Nachr. 290 (2017), no. 5-6, 930-954.

- [16] J. Wang, J. Xiao, *Analytic Campanato spaces by functionals and operators*, J. Geom. Anal. 26 (2016), no. 4, 2996–3018.
- [17] J. Wang, X. Tang, *Compositions and multiplications on holomorphic Campanato spaces*, Houston J. Math. 44 (2018), no. 2, 455-480.
- [18] Z. Wu and C. Xie, *Q spaces and Morrey spaces*, J. Funct. Anal. **201**(2003), no. 1, 282-297.
- [19] H. Wulan and J. Zhou, *Q_K and Morrey type spaces*, Ann. Acad. Sci. Fenn. Math. **38**(2013), no. 1, 193-207.
- [20] J. Xiao and C. Yuan, *Analytic Campanato Spaces and Their Compositions*, Indiana Univ. Math. J. 64 (2015), no. 4, 1001-1025.
- [21] C. Yuan, *Holomorphic Campanato type spaces over Carleson tubes and Bergman metric balls*, J. Math. Anal. Appl. 457 (2018), no. 1, 51-66.
- [22] W. Yuan, W. Sickel and D. Yang, *Morrey and Campanato meet Besov, Lizorkin and Triebel*, Lecture Notes in Mathematics, 2005. Springer-Verlag, Berlin, 2010.
- [23] W. Yuan, W. Sickel and D. Yang, *Compact embeddings of radial and subradial subspaces of some Besov-type spaces related to Morrey spaces*, J. Approx. Theory **174**(2013), 121-139.
- [24] 刘军明, 解析 Morrey 空间, 博士学位论文, 汕头大学, 2014.