数学研究及评论

Mathematical Research with Reviews

Issue 2 (2020) Art.1

Li, Wen-Wei (李文威)

Basic functions and unramified local L-factors for split groups

Sci. China Math. 60 (2017), no. 5, 777–812.

评论员：程舒扬 (University of Michigan, Ann Arbor, MI, USA)

收稿日期：2020年4月8日

自从十九世纪以来，ζ函数与L函数一直在代数数论的研究中占据着非常重要的地位。根据大量已知的例子以及影响深远的猜想，目前人们相信L函数普遍具备三个基本解析性质：欧拉乘积、解析延拓、以及函数方程。以经典的狄利克雷L函数

$$L(s,\chi) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\chi(n)}{n^s} \tag{1}$$

为例，此处 $\chi : \mathbb{Z} \to \mathbb{C}^\times$ 为模 k 的原狄利克雷特征（$L(s,1) = \zeta(s)$ 为黎曼ζ函数），则

1. 欧拉乘积： 当 $\mathrm{Re}(s) > 1$ 时，级数 (1) 绝对收敛，并且满足欧拉乘积公式

   $$L(s,\chi) = \prod_{p \nmid k} \frac{1}{1-\chi(p)p^{-s}}, \tag{2}$$

   此处 p 遍历所有不整除 k 的素数。
2. 解析延拓： 级数 (1) 在右半平面 $\mathrm{Re}(s) > 1$ 上定义一全纯函数，并且可解析延拓为整个复平面 $\mathbb{C}$ 上的亚纯函数，仍然记为 $L(s,\chi)$.

3. 函数方程： 定义常数 $a = \begin{cases} 0 & 若\ \chi(-1) = 1 \\ 1 & 若\ \chi(-1) = -1 \end{cases}$ 以及完备化的L函数

$$\xi(s,\chi) = \pi^{-\frac{s+a}{2}}\Gamma(\tfrac{s+a}{2})k^{\frac{s+a}{2}}L(s,\chi), \tag{3}$$

则 $\xi(s,\chi)$ 满足函数方程

$$\xi(1-s,\overline{\chi}) = \frac{i^a\sqrt{k}}{\tau(\chi)}\xi(s,\chi), \tag{4}$$

此处 $\tau(\chi) = \sum_{m=1}^{k}\chi(m)e^{2\pi im/k}$, 且满足 $|\tau(\chi)| = \sqrt{k}$.

详见 [1] 以及其中的参考文献.

随着二十世纪初类域论的发展以及随之而来的代数数论中局部—整体方法的引入，谢瓦莱与韦伊于三十年代先后定义了整体域 F 的 idele 群 $\mathbb{A}_F^\times$ 以及 adele 环

$$\mathbb{A}_F = \left\{(x_v)_v \,\middle|\, \forall v, x_v \in F_v\ 且\ \exists S, |S| < \infty, \forall v \notin S, v(x_v) = 0\right\},$$

此处 $v : F \to \mathbb{R}\cup\{\infty\}$ 为 F 上的赋值，且 S 包含所有 F 上的阿基米德赋值。Idele 与 adele 的概念有效地整合并且简化了早期代数数论的基本理论。例如理想类群 $\mathrm{Cl}(F)$ 的有限性与狄利克雷单位定理，通过考虑正合序列

$$1 \longrightarrow (\textstyle\prod_{v\nmid\infty} F_v^\times)^1/O_F^\times \longrightarrow (\mathbb{A}_F^\times)^1/F^\times \longrightarrow \mathrm{Cl}(F) \longrightarrow 1$$

（此处 $G^1 \subset G$ 代表由绝对值为 1 的元素构成的子群），可以得出这两个定理等价于 idele 类群 $(\mathbb{A}_F^\times)^1/F^\times$ 的紧致性。随后在其著名的博士论文 [2] 中，泰特对赫克L函数的三个基本解析性质给予了基于 adele 环上的傅里叶分析的全新证明。类似于 $\mathbb{R}$ 上的传统傅里叶分析，泰特构造了 $\mathbb{A}_F$ 上的施瓦茨空间

$$\mathcal{S}(\mathbb{A}_F) = \left\{\bigotimes_v f_v \,\middle|\, \forall v, f_v \in \mathcal{S}(F_v)\ 且\ \exists S, |S| < \infty, \forall v \notin S, f_v = \mathbf{1}_{O_{F_v}}\right\}$$

（此处 $\mathcal{S}(F_v) = \begin{cases} C_c^\infty(F_v) & 若\ v\ 为非阿基米德 \\ \mathcal{S}(F_v) & 若\ F_v \simeq \mathbb{R}\ 或\ \mathbb{C} \end{cases}$ ）与傅里叶变换 $f \leftrightarrow \widehat{f}$，并且以泊松求和公式

$$\sum_{x\in F} f(x) = \sum_{x\in F}\widehat{f}(x) \tag{5}$$

为出发点重新证明了赫克L函数的解析延拓以及函数方程

此后在六十年代末由朗兰兹 [3] 提出了自守L函数的一般定义，并由此为 adele 约化群 $G(\mathbb{A}_F)$ 上的自守形式与自守表示理论带来了持续的蓬勃发展，而

泰特 [2] 的方法也在七十年代被戈德门特与雅凯 [4] 成功推广至 $\mathrm{GL}_n(\mathbb{A}_F)$ 上的标准自守L函数

$$L(s,\pi,\mathrm{Std}) \;=\; \prod_{v\notin S}\frac{1}{\det(1-c(\pi_v)q_v^{-s})}, \tag{6}$$

此处 $\pi_v:\mathrm{GL}_n(F_v)\to\mathrm{U}(V_\pi)$ 为局部群 $\mathrm{GL}_n(F_v)$ 在希尔伯特空间 V_π 上的非分歧表示，而 $c(\pi_v)$ 为 π_v 的佐武参数（因此 $c(\pi_v)\subset\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ 为一半单共轭类）。类似于 [2]，戈德门特与雅凯的方法来源于 adele 矩阵向量空间 $\mathrm{M}_n(\mathbb{A}_F)\simeq\mathbb{A}_F^{n\times n}$ 上的傅里叶分析。进入二十一世纪以来，布雷弗曼与卡日丹 [5]、萨克拉尔迪斯 [6]、拉福格 [7] 与吴宝珠 [8] 先后提出了关于将 [2] 与 [4] 的方法推广到一般约化群 $G(\mathbb{A}_F)$ 上的非线性傅里叶分析，并从而研究自守L函数

$$L(s,\pi,\rho) \;=\; \prod_{v\notin S}\frac{1}{\det(1-\rho(c(\pi_v))q_v^{-s})} \tag{7}$$

的猜想。详见 [5, 6, 7, 8, 9, 10] 以及其中的参考文献。

接下来我们对 [10] 的内容做进一步的介绍。本文的主要研究对象为自守L函数在欧拉乘积 (7) 下的非分歧局部L因子

$$L(s,\pi_v,\rho_v) \;=\; \frac{1}{\det(1-\rho_v(c(\pi_v))q_v^{-s})} \tag{8}$$

以及其与局部群 $G(F_v)$ 上的基本函数 $f_{\rho,v}\in\mathcal{H}_{\mathrm{ac}}(G(F_v)/\!\!/K_v)$ 之间的关系。

首先仍旧以狄利克雷L函数的非分歧局部L因子 (2) 为例。在局部域的概念被引入之前，局部L因子 $L(s,\chi_p)$ 的计算通常以几何级数

$$\sum_{m=0}^{\infty}\frac{\chi_p(p^m)}{p^{ms}} \;=\; \frac{1}{1-\chi_p(p)p^{-s}} \tag{9}$$

的求和而收尾。此处几何级数的出现可以视作将数论问题转化为组合问题从而得以解决。而在泰特 [2] 的方法中，级数 (9) 被转化为局部单位群 $\mathbb{Q}_p^\times$ 上的泰特积分

$$\begin{aligned}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{\chi_p(p^m)}{p^{ms}} \;&=\; \sum_{m=0}^{\infty}\mathrm{vol}^\times(p^m\mathbb{Z}_p^\times)\chi_p(p^m)(p^{-m})^s\\ &=\; \int_{\mathbb{Q}_p^\times}\mathbf{1}_{\mathbb{Z}_p\setminus\{0\}}(x)\chi_p(x)|x|_p^s\mathrm{d}^\times x,\end{aligned} \tag{10}$$

此处 $\mathrm{d}^\times x$ 为 $\mathbb{Q}_p^\times$ 上的乘法群哈尔测度，且满足 $\mathrm{vol}^\times(\mathbb{Z}_p^\times)=1$。事实上 [2] 的一个主要创新点在于，除了基本函数 $f_{\mathrm{Std},p}=\mathbf{1}_{\mathbb{Z}_p\setminus\{0\}}$ 以外，泰特同时考虑了其他所有施瓦茨函数 $f_p\in C_c^\infty(\mathbb{Q}_p)$ 的泰特积分

$$\zeta(f_p,\chi_p,s) \;=\; \int_{\mathbb{Q}_p^\times}f_p(x)\chi_p(x)|x|_p^s\mathrm{d}^\times x \tag{11}$$

并且证明了 $\zeta(f_p,\chi_p,s)\in\mathbb{C}(p^{-s})$ 始终为有理函数，而且对于所有有理式 $\zeta(f_p,\chi_p,s)$ 的分母存在最大公约式 $\frac{1}{L(s,\chi_p)}\in\mathbb{C}[p^{-s}]$. 除此以外 [2] 的另一个主要发现在于，通过类似的方法也可以定义分歧赋值处的局部L因子 $L(s,\chi_v)$ 为所有施瓦茨函数 $f_v\in\mathcal{S}(\mathbb{Q}_v)$ 的泰特积分 (11) 的分母的最大公约式的倒式（阿基米德L因子的构造有稍许不同）。如此定义的完备化的L函数 $\xi(s,\chi)$ 满足函数方程 (4)，并且对于 (3) 中的伽马因子

$$\pi^{-\frac{s+a}{2}}\Gamma(\tfrac{s+a}{2})k^{\frac{s+a}{2}} \quad = \quad L(s,\chi_\infty)\prod_{p|k}L(s,\chi_p) \tag{12}$$

给出了基于分歧局部L因子的诠释。因此 (3) 亦可视作 $\xi(s,\chi)$ 的完备化（同时包含所有非分歧与分歧局部L因子）的欧拉乘积。

在戈德门特与雅凯 [4] 的工作中，以 (π,V_π) 为 $\mathrm{GL}_n(\mathbb{A}_F)$ 上的尖点表示的情况为例，则自守L函数 $L(s,\pi,\mathrm{Std})$ 的所有局部L因子 $L(s,\pi_v,\mathrm{Std}_v)$ 皆可通过泰特积分 (11) 的推广形式

$$\zeta(f_v,\phi_v,s) \quad = \quad \int_{\mathrm{GL}_n(F_v)} f_v(x)\phi_v(x)|\det(x)|_v^s\mathrm{d}x \tag{13}$$

在 $\mathbb{C}(q_v^{-s})$ 中的分母的最大公约式的倒式而构造（阿基米德L因子的构造有稍许不同）。此处 $f_v\in\mathcal{S}(\mathrm{M}_n(F_v))$ 为矩阵向量空间 $\mathrm{M}_n(F_v)\simeq F_v^{n\times n}$ 上的施瓦茨函数，而

$$\phi_v(x) \quad = \quad \langle\pi_v(x)u,\tilde{u}\rangle \tag{14}$$

（任意 $u,\tilde{u}\in V_{\pi,v}$）为局部酉表示 $(\pi_v,V_{\pi,v})$ 的矩阵元。若 π_v 为非分歧表示，取其球向量 u°（即 $u^\circ\in V_{\pi,v}^{K_v}$ 在 $K_v=\mathrm{GL}_n(O_{F_v})$ 的作用下不变且满足 $\|u^\circ\|=1$）并且定义球矩阵元 $\phi_v^\circ(x)=\langle\pi_v(x)u^\circ,u^\circ\rangle$, 则

$$\begin{aligned}&\int_{\mathrm{GL}_n(F_v)}\mathbf{1}_{\mathrm{M}_n(O_{F_v})\cap\mathrm{GL}_n(F_v)}(x)\phi_v^\circ(x)|\det(x)|_v^s\mathrm{d}x\\ =\ &\sum_{\mu\in\Lambda}\mathrm{tr}\big(\pi_v(\mathbf{1}_{K_v\mu(\varpi_v)K_v})\big)\big|\det(\mu(\varpi_v))\big|_v^s,\end{aligned} \tag{15}$$

此处 Λ 为所有形如

$$\mu(t) \quad = \quad \begin{bmatrix} t^{a_1} & 0 & \cdots & 0 & 0\\ 0 & t^{a_2} & \cdots & 0 & 0\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & t^{a_{n-1}} & 0\\ 0 & 0 & \cdots & 0 & t^{a_n}\end{bmatrix} \tag{16}$$

且满足 $0 \le a_1 \le \cdots \le a_n$ 的单参数子群 $\mu : \mathbb{G}_m \to T \subset \mathrm{GL}_n$ 所组成的集合，而 $\varpi_v \in O_{F_v}$ 满足 $|\varpi_v|_v = q_v^{-1}$. 令 $c(\pi_v) \subset \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ 为 π_v 的佐武参数，则根据佐武同构定理

$$\mathrm{tr}\big(\pi_v(\mathbf{1}_{K_v\mu(\varpi_v)K_v})\big) \quad = \quad q_v^{\langle\rho,\hat{\mu}\rangle}\mathrm{ch}_{V(\hat{\mu})}\big(c(\pi_v)\big) \tag{17}$$

（此处 ρ 为外尔向量，$\mathrm{ch}_{V(\hat{\mu})}$ 为以 $\hat{\mu} : \widehat{T}(\mathbb{C}) \to \mathbb{C}^\times$ 为最高权的不可约表示 $V(\hat{\mu})$ 在 $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ 上的特征标）可得出

$$\begin{aligned}
&\sum_{a_1+\cdots+a_n=k} \mathrm{tr}\big(\pi_v(\mathbf{1}_{K_v\mu(\varpi_v)K_v})\big)\big|\det(\mu(\varpi_v))\big|_v^s \\
= &\sum_{\langle\rho,\hat{\mu}\rangle=\frac{n-1}{2}k} q_v^{\langle\rho,\hat{\mu}\rangle}\mathrm{ch}_{V(\hat{\mu})}\big(c(\pi_v)\big)q_v^{-ks} \\
= &\ \mathrm{tr}\Big(c(\pi_v)\Big|\bigoplus\nolimits_{\langle\rho,\hat{\mu}\rangle=\frac{n-1}{2}k}V(\hat{\mu})\Big)q_v^{-k(s-\frac{n-1}{2})}.
\end{aligned} \tag{18}$$

因此泰特积分 (15) 可以归结为代数组合学中的重要结论

$$\bigoplus\nolimits_{\langle\rho,\hat{\mu}\rangle=\frac{n-1}{2}k}V(\hat{\mu}) \quad \simeq \quad \mathrm{Sym}^k(\mathrm{Std},\mathbb{C}^n) \tag{19}$$

从而转化为级数

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{\infty}\mathrm{tr}\big(\mathrm{Sym}^k c(\pi_v)\big)q_v^{-k(s-\frac{n-1}{2})} \quad &= \quad \frac{1}{\det\big(1-c(\pi_v)q_v{}^{-(s-\frac{n-1}{2})}\big)} \\
&= \quad L(s-\tfrac{n-1}{2},\pi_v,\mathrm{Std}_v).
\end{aligned} \tag{20}$$

因此 $\mathrm{GL}_n(\mathbb{A}_F)$ 上的标准自守L函数的非分歧局部L因子可通过基本函数 $f_{\mathrm{Std},v} = \mathbf{1}_{\mathrm{M}_n(O_{F_v})\cap\mathrm{GL}_n(F_v)}$ 相对于球矩阵元 $\phi_v^\circ(x)$ 的泰特积分得到。

在 [5, 8] 对于戈德门特与雅凯的工作的推广下，一般约化群 $G(\mathbb{A}_F)$ 上的自守L函数的非分歧局部L因子可展开为级数

$$\begin{aligned}
L(s,\pi_v,\rho_v) \quad &= \quad \frac{1}{\det(1-\rho_v(c(\pi_v))q_v^{-s})} \\
&= \quad \sum_{k=0}^{\infty}\mathrm{tr}\big(\mathrm{Sym}^k\rho_v(c(\pi_v))\big)q_v^{-ks}.
\end{aligned} \tag{21}$$

若对偶同态 $\rho_v : \widehat{G}(\mathbb{C})_v \to \mathrm{GL}_r(\mathbb{C})$ 满足如下限定条件，即存在代数群同态 $\det_G : G \to \mathbb{G}_m$ 使对偶图表

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{C}^\times \arrow[r, "\widehat{\det}_G"] \arrow[d, equal] & \widehat{G}(\mathbb{C})_v \arrow[d, "\rho_v"] \\
Z(\mathrm{GL}_r(\mathbb{C})) \arrow[r, hook] & \mathrm{GL}_r(\mathbb{C})
\end{tikzcd}$$

交换，则根据佐武同构定理 (17) 在 $G(F_v)$ 上的推广可定义基本函数

$$f_{\rho,v} \;=\; \sum_{\mu\in X_*(T)} c_\mu q_v^{-\langle\rho,\mu\rangle}\mathbf{1}_{K\mu(\varpi)K} \tag{22}$$

使其满足

$$\mathrm{tr}\big(\mathrm{Sym}^k\rho_v(c(\pi_v))\big) \;=\; \sum_{\det_G(\mu(z))=z^k} c_\mu \mathrm{tr}\big(\pi_v(\mathbf{1}_{K_v\mu(\varpi_v)K_v})\big), \tag{23}$$

并由此推出

$$\int_{G(F_v)} f_{\rho,v}(x)\phi_v^\circ(x)|\det_G(x)|_v^s\mathrm{d} \;=\; L(s,\pi_v,\rho_v). \tag{24}$$

此处基本函数的系数 c_μ 主要由 $\mathrm{Sym}^k\rho_v$ 分解为不可约表示 $V(\hat{\mu})$ 的重数所决定，而对于这些系数的组合与几何性质的深入研究亦是难点所在。

本文的主要贡献在于对系数 c_μ 给出了基于庞加莱级数的组合与几何解释。作者证明了如下恒等式

$$\sum_{\mu\in X_*(T)_\ominus} c_\mu(q^{-1})e^\mu X^{\det_G(\mu)} \;=\; \frac{Q}{\prod_{i=1}^s(1-q^{d_i}e^{\mu_i}X^{\det_G(\mu_i)})}, \tag{25}$$

此处 Q 为有限多项 $\pm e^\mu X^{\det_G(\mu)}q^d$ 之和，具体参见 [10]. 除此以外作者亦对若干经典结论做出了技术性的改进以及重新诠释，例如将佐武同构定理推广至 $G(F_v)$ 上的一类非紧支撑函数，以及对于 $\mathrm{GL}(n)$ 与 $\mathrm{GSp}(4)$ 上的标准L函数的重新解读。对于后续可能的工作方向，就近期而言首先可以考虑生成函数 (25) 的分母 d_i,μ_i 以及分子 Q 的算术与几何意义的深入研究，而从长远来看目标始终在于自守L函数 $L(s,\pi,\rho)$ 以及朗兰兹函子性猜想方面的进一步工作。

References

[1] H. Davenport, *Multiplicative number theory*. Vol. 74. Springer (2013).

[2] J. Tate, *Fourier analysis in number fields and Hecke's zeta functions*. Thesis Princeton (1950).

[3] R. Langlands, *Letter to André Weil*. unpublished, January (1967).

[4] R. Godement and H. Jacquet, *Zeta functions of simple algebras*. Vol. 260. Springer (2006).

[5] A. Braverman and D. Kazhdan, *γ-functions of representations and lifting*. In Visions in Mathematics. Birkhäuser Basel (2010): 237-278.

[6] Y. Sakellaridis, *Spherical varieties and integral representations of L-functions*. Algebra & Number Theory 6, no. 4 (2012): 611-667.

[7] L. Lafforgue, *Noyaux du transfert automorphe de Langlands et formules de Poisson non linéaires*. Japanese Journal of Mathematics 9, no. 1 (2014): 1-68.

[8] B. Ngô, *On a certain sum of automorphic L-functions*. Automorphic forms and related geometry: assessing the legacy of II Piatetski-Shapiro 614 (2014): 337-344.

[9] B. Casselman, *Monoids and L-functions*. (2014).

[10] W. Li, *Basic functions and unramified local L-factors for split groups*. Science China Mathematics 60, no. 5 (2017): 777-812.