

## 数学研究及评论

Mathematical Research with Reviews

Issue 1 (2020) Art.5

© Prior Science Publishing

Ma, Jiming (马继明)

*Hyperbolicity of 3-trip Lorenz knots*

Topology Appl. 212 (2016), 57–70.

评论员：杨志青 (大连理工大学, 大连)

收稿日期：2020年3月5日

在这篇文章中，作者研究了旅行数(trip number)为3的洛伦兹(Lorenz knot) 纽结，并用两种方法给出了拓扑类型分类。

洛伦兹纽结来自洛伦兹方程组，这是描述空气流体运动的一个简化微分方程组。它由美国气象学家洛伦兹(Lorenz, E. N.)于1963年在研究大气热对流时提出。洛伦兹从该方程组的研究中发现了非周期的混沌现象，引起了学者们广泛的兴趣。该方程组的一般形式如下[4]:

$$x' = -\sigma x + \sigma y, \quad y' = -xz + rx - y, \quad z' = xy - bz.$$

近年来，很多数学家开始从动力系统和拓扑学两方面研究洛伦兹方程组。它们关心的是原方程组的一个特殊情形：

$$x' = -10x + 10y, \quad y' = 28x - y - xz, \quad z' = xy - \frac{8}{3}z.$$

1977年，Williams, R.在研究洛伦兹吸引子时引入了洛伦兹模版(Lorenz template) [5, 6]的概念。洛伦兹模版 $T$ 是一个分叉二维流形，见下图(Figure 1). Tucker和Ghys证明了任何一个洛伦兹系统里面的纽结或者链环都可以被投射（嵌入）到洛伦兹模版上。另一方面，洛伦兹模版上的纽结可以被很方便地描述。洛伦兹纽结就是洛伦兹模版上的沿箭头方向的简单闭曲线。

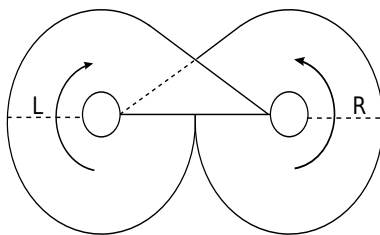


图 1. 洛伦兹模版

洛伦兹纽结是一类非常值得研究的纽结。对它的研究有助于理解在动力系统上理解洛伦兹流。此外，数学上已经证明：

环面纽结  $\cup$  代数纽结  $\subseteq$  洛伦兹纽结  $\subseteq$  正瓣的闭  $\subseteq$  纤维化纽结(fibered knots).

纤维化纽结有很多有趣的性质，这方面的研究很多，现在还没有被完全分类。此外，用至多8个理想四面体得到的502个双曲纽结补空间中，有249个是洛伦兹纽结[3]。此外，洛伦兹纽结还和模曲面(modular surface)以及数论有密切的关系[7, 8, 9, 10, 11]。Joan S. Birman写了一篇关于洛伦兹纽结的介绍性文章[2]。

如果 $K$ 是一个嵌入洛伦兹模版 $T$ 的纽结，每当 $K$ 绕过左边的洞一次，我们就写一个 $x$ ，每当 $K$ 绕过右边的洞一次，我们就写一个 $y$ 。这样我们就得到一个由 $x, y$ 表示的字，我们称它为洛伦兹字。对于由 $K$ 得到的一个洛伦兹字 $w$ ，它的旅行数就是它包含的形如 $x^a y^b$ 的字的最少个数。例如旅行数为3的洛伦兹字就可以表示为 $x^{a_1} y^{b_1} x^{a_2} y^{b_2} x^{a_3} y^{b_3}$ 。穷举洛伦兹字可以得到所有的洛伦兹纽结。不过洛伦兹字和洛伦兹纽结并不是一一对应的，一个洛伦兹纽结可以对应不同的洛伦兹字。例如，刚才给出的洛伦兹字与 $x^{b_1} y^{a_2} x^{b_2} y^{a_2} x^{b_3} y^{a_1}$ 以及 $x^{b_3} y^{a_3} x^{b_2} y^{a_2} x^{b_1} y^{a_1}$ 都对应同一个洛伦兹纽结[1]。

为了方便，我们可以省去 $x, y$ ，把 $x^{a_1} y^{b_1} x^{a_2} y^{b_2} x^{a_3} y^{b_3}$ 记为 $(a_1, b_1, a_2, b_2, a_3, b_3)$ 。在[1]中，Bedient证明了任何一个洛伦兹纽结对应的洛伦兹字的集合中，可以取得以下的一个代表元（而且是一一对应的）。

**Theorem 1.** 每一个旅行数为3的洛伦兹纽结等价于以下的一个（而且是只有一个）洛伦兹字。

*Type Ia.*  $(1, b, 1, b, 1, b + 1)$ .

*Type Ib.*  $(1, b, 1, b + 1, 1, b + 1)$ .

*Type II.*  $(1, b, 1, b', 2, b')$ .

*Type III.*  $(a', b, a', b', 1, b')$ ，这里 $a' \leq b', b < b'$ （去掉与*Type Ib*重合的部分）。

在此基础上，马继明的文章证明了Type Ia, Type Ib分别对应于 $(3, 3b + 1)$ 和 $(3, 3b + 2)$ 型的环面结，Type II, Type III的都是双曲纽结。作者给出了两种证明。

第一种证明用到了Futer, Kalfagianni, Purcell证明的一个结果。

**Theorem 2.** [12] 设 $w \in B_3$ , 将 $w$ 封闭后得到纽结 $K \subset S^3$ . 则 $S^3 - K$ 是双曲的当且仅当 $w$ 是一般的(*generic*), 并且 $w$ 不与任何的 $\sigma_1^p \sigma_2^q$ 共轭, 其中 $p, q \in \mathbb{Z}$ ,  $\sigma_1, \sigma_2 \in B_3$ 是经典的生成元。

作者希望把结果推广, 不过第一种证明方法不好推广, 所以作者尝试第二种方法。该方法用到了Dehornoy序 $<_D$  [13, 14]. 利用Dehornoy序, 可以定义一个辫元素的Dehornoy底(Dehornoy floor)  $[\beta]_D = \min\{m \in \mathbb{Z}_{\geq 0} \mid \Delta^{-2m-2} <_D \beta <_D \Delta^{2m+2}\}$ . Tetsuya Ito证明了以下结果:

**Theorem 3.** [14] 设 $\beta \in B_n$ , 将 $\beta$ 封闭后得到纽结 $\widehat{\beta} \subset S^3$ . 如果 $[\beta]_D \geq 3$ , 那么 $\widehat{\beta}$ 是双曲纽结当且仅当 $\beta$ 是 *pseudo-Anosov*的。

利用这个结果, 作者可以证明 $[\beta]_D \geq 3$ 的情形, 这对应与洛伦兹纽结分类中 $b > 3$ 时的Type II 和III的情形。对于 $[\beta]_D = 1, 2$ 的部分, 需要一个情形一个情形具体分析。这部分有一定技术上的难度。作者将得到的三维流形实现为一个曲面 $F$ 的映射环, 即 $F \times [0, 1]/(f(x), 1) \sim (x, 0)$ , 其中 $f : F \rightarrow F$  是一个同胚映射。这时, 作者假设 $f$ 总是pseudo-Anosov的映射 (不能证明), 那么就可以完成第二个证明。

一个有意思的问题是, 如何把洛伦兹纽结进行完全分类。也就是把Bedient [1]的结果推广到旅行数 $> 3$ 的情形。此外, [15, 16]也证明了, 当旅行数 $> 3$ 时, 存在既不是环面结也不是双曲纽结的洛伦兹纽结。所以对旅行数 $> 3$ 的洛伦兹纽结进行拓扑类型的分类也是很有意思的。本文作者的第二种证明就是这方面的一个尝试。如果能够证明作者构造的 $f$ 总是pseudo-Anosov的映射, 那么很有可能把这个结果推广到一般情形。

另一个问题是洛伦兹纽结的识别问题。Slavik Jablon证明了在交叉点数 $\leq 16$ 所有1,701,936个素纽结中, 只有19个纽结是洛伦兹纽结, 其中只有7个是环面纽结。但是对于交叉点数 $> 16$ 的纽结, 如何判断它是否是洛伦兹纽结?

此外, 由于洛伦兹纽结是一类非常特殊的纽结, 它既是纤维化纽结, 又是正辫的闭, 所以它的一些拓扑性质有可能有比一般纽结更简单的计算方法和特殊的性质。比如洛伦兹纽结的亏格就可以直接从它对应的洛伦兹字直接计算得到[2]. 所以计算它的其他拓扑不变量也是有趣的问题。

## REFERENCES

- [1] Richard E. Bedient, *Classifying 3-trip Lorenz knots*, Topol. Appl. 20 (1) (1985) 89–96.
- [2] Joan S. Birman, *Lorenz knots*, arXiv:1201.0214 [math.GT].

- [3] Abhijit Champanerkar, Ilya Kofman, Timothy Mullen, *The 500 simplest hyperbolic knots*, J. Knot Theory Ramif. 23 (12) (2014) 1450055.
- [4] Lorenz, E., *Deterministic non-periodic flow*, J. Atmos. Sci. 20, 130–141 (1963)
- [5] Williams, R., *The structure of Lorenz attractors*, In: Bernard, P., Ratiu, T. (eds.) Turbulence Seminar, Berkeley 1976/77, Lecture Notes in Mathematics, Volume 615, pp. 94–112. Springer (1977)
- [6] Williams, R., *The structure of Lorenz attractors*, Publ. Math. I.H.E.S., 50, 73–99 (1979)
- [7] Kelmer Dubi, *Quadratic irrationals and linking numbers of modular knots*, J. Mod. Dyn. 6 (4) (2012) 539–561.
- [8] Charles J. Mozzochi, *Linking numbers of modular geodesics*, Isr. J. Math. 195 (1) (2013) 71–95.
- [9] Peter Sarnak, *Linking numbers of modular knots*, Commun. Math. Anal. 8 (2) (2010) 136–144.
- [10] Caroline Series, *The modular surface and continued fractions*, J. Lond. Math. Soc. (2) 31 (1) (1985) 69–80.
- [11] Mark Pollicott, *Distribution of closed geodesics on the modular surface and quadratic irrationals*, Bull. Soc. Math. Fr. 114 (4) (1986) 431–446.
- [12] David Futer, Efstratia Kalfagianni, Jessica S. Purcell, *Cusp areas of Farey manifolds and applications to knot theory*, Int. Math. Res. Not. (23) (2010) 4434–4497.
- [13] Patrick Dehornoy, Dynnikov Patrick, Ivan Dynnikov, Dale Rolfsen, Bert Wiest, *Ordering Braids*, Mathematical Surveys and Monographs, vol. 148, American Mathematical Society, Providence, RI, 2008.
- [14] Tetsuya Ito, *Braid ordering and the geometry of closed braid*, Geom. Topol. 15 (1) (2011) 473–498.
- [15] J.S. Birman, R. Williams, *Knotted periodic orbits in dynamical systems, I: Lorenz equations*, Topology 22 (1983) 47–82.
- [16] Paulo Gomes, Nuno Franca, Luis Silva, *Partial classification of Lorenz knots: syllable permutations of torus knots words*, Physica D 306 (2015) 16–24.