数学研究及评论
Mathematical Research with Reviews
Issue 2 (2019) Art.9

Lin, Kai-Liang (林开亮)
Hurwitz-Radon's symplectic analogy and Hua's cyclic recurrence relation
Electron. J. Linear Algebra 26 (2013), 858–872.

评论员：黄华林 (华侨大学，泉州)
收稿日期：2019年10月14日

所谓Hurwitz-Radon方程，即如下关于r个n阶方阵A_i $(1 \leq i \leq r)$ 的矩阵方程组

$$A_i' = -A_i, \quad A_i^2 = -I_n, \quad A_iA_j = -A_jA_i \ \ (i \neq j).$$

此方程组起源于二次型的复合问题[2], 在很多重要的数学和物理问题中也自然产生，广受关注和研究。

注意到以上方程组中的第一个，即$A_i' = -A_i$, 并非代数关系，结合第二个可知Hurwitz-Radon方程实际上是求r 个n 阶正交方阵A_i满足

$$A_i^2 = -I_n \ \ (1 \leq i \leq r), \quad A_iA_j = -A_jA_i \ \ (i \neq j).$$

此即为所评论文中的正交群$O(n, F)$版本，自然地也可以考虑一般线性群$GL(n, F)$, 酉群$U(n, F)$, 和辛群 $Sp(n, F)$等的版本。

本文主要研究Hurwitz-Radon方程的辛群版本。此问题的相关研究最早出现于著名数学家华罗庚在上世纪四十年代关于矩阵几何理论的系列工作中[1]，其核心的思路为建立辛群版本与正交群版本之间的明确对于关系，并利用不同版本之间的转换得到循环递推关系。本文作者充分应用和借鉴华罗庚的处理方法，考虑Hurwitz-Radon方程的对偶版本

$$B_i^2 = I_n \ \ (1 \leq i \leq s), \quad B_iB_j = -B_jB_i \ \ (i \neq j)$$

以及混合型的Hurwitz-Radon方程

$$
\begin{aligned}
A_i^2 = -I_n \ \ (1 \le i \le r), &\qquad A_iA_j = -A_jA_i \ \ (i \ne j),\\
B_i^2 = I_n \ \ (1 \le i \le s), &\qquad B_iB_j = -B_jB_i \ \ (i \ne j),\\
A_iB_j \ \ = \ \ -B_jA_i \ \ (\forall\ i, j).
\end{aligned}
$$

作者修正了华罗庚文中的一个小错误，得到了更为完整的循环递推关系（即文章的定理5.1），给出了精确的辛群版的Hurwitz-Radon定理（即文章的定理3.7和定理3.9）。本文只依赖于基本的线性代数知识，却解决了比较重要和深刻的问题，值得认真研读。

References

[1] Hua, Loo-Keng(华罗庚): *Geometries of Matrices II. Study of involutions in the geometry of symmetric matrices.* Transactions of the American Mathematical Society, 61(2):193–228, 1947.

[2] Shapiro, Daniel: *Compositions of quadratic forms.* Walter de Gruyter & Co., Berlin, 2000.