

数学研究及评论

Mathematical Research with Reviews

Issue 2 (2019) Art.8

© Prior Science Publishing

Zhao, Bin (赵彬); Lu, Jing (鲁静); Wang, Kai Yun (汪开云)

The answer to a problem posed by Zhao and Ho

Acta Math. Sin. (Engl. Ser.) 35 (2019), no. 3, 438–444.

评论员：徐晓泉 (闽南师范大学，漳州)

收稿日期：2019年10月15日

在非Hausdorff拓扑和Domain理论中，拓扑空间中的定向集和既约集是人们关注的两类重要子集，如连续domain的概念是基于定向子集定义的，而sober空间的概念则是通过既约闭集定义的。对拓扑空间 X ，我们可以赋予如下的特殊化预序(preorder)： $x \leq_X y$ 当且仅当 x 属于单点 y 的闭包。在预序 \leq_X 下， X 的每个开集 U 都是上集，即若 $x \in U$ 且 $x \leq_X y$ ，则 $y \in U$ 。易知 \leq_X 为 X 上的偏序(partial order)当且仅当 X 是 T_0 的，即 X 中不同的点有不同的邻域系，或等价地，有不同的闭包。全体 T_0 空间所构成的范畴记为 \mathbf{Top}_0 。拓扑空间 X 中的闭集 A 称为是既约的，如果 A 不能表示为 A 中的两个闭真子集的并。记 $\text{IRR}(X)$ 为 X 中的既约闭集全体。 X 称为是sober的，如果对任意 $A \in \text{IRR}(X)$ ，都存在 X 中唯一的点 x_A 使得 A 为单点 x_A 的闭包，即在 X 的特殊化序下 A 中有最大元。全体sober空间所构成的范畴记为 \mathbf{Sob} 。在文[1]中，赵东升和何永坚基于限定既约闭集 A 具有上确界，定义了一类称之为 k -有界sober空间的弱sober空间。对拓扑空间 X ，记 $\text{KB}(X)$ 为 X 中具有上确界的既约闭集全体，它是 $\text{IRR}(X)$ 的一个子集。 X 称为是 k -有界sober的，若对任意 $A \in \text{KB}(X)$ ，都存在 X 中唯一的点 x_A 使 A 为单点 x_A 的闭包。全体 k -有界sober空间所构成的范畴记为 \mathbf{KBSob} 。众所周知， \mathbf{Sob} 是 \mathbf{Top}_0 的反射满子范畴，即对任意 T_0 空间 X ，都存在一个sober空间 X^s 和连续映射 $\eta_X : X \rightarrow X^s$ ，满足下述universal性质：从 X 到任意sober空间的任一连续映射 $f :$

$X \rightarrow Y$, 存在唯一的连续映射 $f^s : X^s \rightarrow Y$ 使 $f^s \circ \eta_X = f$. 从同胚的角度, X^s 就是 $\text{IRR}(X)$ 上赋予 lower Vietoris 拓扑 $\{\diamond U : U \text{ 为 } X \text{ 中的开集}\}$ 所得到的拓扑空间 $P_H(\text{IRR}(X))$, 此处 $\diamond U = \{A \in \text{IRR}(X) : A \subseteq U\}$, $\eta_X : X \rightarrow X^s$ 为如下定义的拓扑嵌入: $\eta_X(x) = \text{cl}\{x\}$ (单点集 $\{x\}$ 在 X 中的闭包). 我们称 X^s 为 X 的范式 sober 化. 之所以考虑这种拓扑空间结构, 是基于将一个“一般”拓扑结构嵌入到一个“好”拓扑结构的思想. 关于 \mathbf{KBSob} , 有一个自然而重要的问题: \mathbf{KBSob} 是否与 \mathbf{Sob} 类似, 也是 \mathbf{Top}_0 的反射满子范畴? 即, 对任意 T_0 空间 X , 是否都存在一个 k -有界 sober 空间 X^k 和连续映射 $\eta_X : X \rightarrow X^k$, 满足下述 universal 性质: 对 X 到任意 k -有界 sober 空间的任一连续映射 $f : X \rightarrow Y$, 存在唯一的连续映射 $f^k : X^k \rightarrow Y$ 使 $f^k \circ \eta_X = f$. 受 T_0 空间 sober 化的启发, 赵东升和何永坚在文[1]中提出了如下问题:

对给定的 T_0 空间 X , $P_H(\text{KB}(X))$ 是否为 X 的范式 k -有界 sober 化?

在该文中, 赵彬, 鲁静和汪开云以否定的形式解决了这一公开问题. 他们构造了一个定向完备偏序集 P (即 P 中的每个定向子集都有上确界), 对其 Scott 空间 $\Sigma P = (P, \sigma(P))$ ($U \in \sigma(P)$ 当且仅当 U 是上集, 且对 P 中的任一定向集 D , 若 D 的上确界 $\vee D \in U$, 则 $D \cap U \neq \emptyset$) 而言, $P_H(\text{KB}(\Sigma P))$ 不是 ΣP 的范式 k -有界 sober 化. 值得说明的是, 对一个 T_0 空间 X 而言, 寻找 X 的 k -有界 sober 化或其它类型的弱 sober 化 (假若它存在) 有多个途径, 从一定意义上来说, 范式空间 $P_H(\text{KB}(X))$ 无疑是其中最自然和重要的途径. 正如该文所指出的, 下述问题仍是一个有趣而重要的问题:

\mathbf{KBSob} 是否是 \mathbf{Top}_0 的反射满子范畴?

我们猜测答案是否定的。

REFERENCES

- [1] D. Zhao, W. Ho, On topologies defined by irreducible sets, J. Log. Algebr. Methods, 84 (2015), 185-195.