**数学研究及评论**
Mathematical Research with Reviews
Issue 2 (2019) Art.7


Li, Jin (李晋); Ma, Dan (马丹)
*Laplace transforms and valuations*
J. Funct. Anal. 272 (2017), no. 2, 738–758.

评论员：方牛发 (南开大学陈省身数学研究所, 天津)
收稿日期：2019年10月13日

设 $Z$ 为从格子 $(\mathcal{C}, \vee, \wedge)$ 到阿贝尔半群 $(\mathcal{G}, +)$ 的映射. 若对任意 $f, g \in \mathcal{C}$ 有

$$Z(f \vee g) + Z(f \wedge g) = Z(f) + Z(g), \tag{1}$$

则称 $Z$ 为赋值 (valuation). 映射 $Z$ 称为格子 $\mathcal{C}$ 的子集 $\mathcal{S}$ 上的赋值, 若 $Z$ 满足 (1) 并且 $f \vee g, f \wedge g \in \mathcal{S}$ 成立.

赋值理论是凸几何分析中的热点研究内容之一. 赋值理论始于 Dehn 的工作, 它是 Dehn 解决著名的希尔伯特第三问题 (即: 是否存在有限的分割使得任意两个体积相等的多胞体分割后的多胞体对应全等?) 的重要工具之一. 之后, Hadwiger 系统地研究了赋值理论. 1957 年, Hadwiger [4] 利用凸体 (具有非空内点的紧致凸集) 的各阶混合体积 (凸几何中最基本概念之一, 参见 [9]) 刻画了连续的刚性运动不变的赋值, 现称为 Hadwiger 特征定理. Hadwiger 的工作极大地推动了赋值理论的发展. 欧氏空间 $\mathbb{R}^n$ 中的凸体空间上的赋值理论称为经典的赋值理论. 近些年来, 经典的赋值理论发展迅速. 自 2010 年以来, 数学家们也关注函数空间的赋值理论, 主要工作参见 [1, 2, 3, 6, 7, 8, 10, 11].

本文既研究了经典赋值理论又研究了有紧致支撑集的函数空间的赋值理论. 在介绍主要结果之前, 我们回顾几个必要的概念. 为了方便, 令 $L_c^1(\mathbb{R}^n)$ 表示 $\mathbb{R}^n$ 中所有具有紧致支撑集的可积函数组成的集合, $C(\mathbb{R}^n)$ 表示 $\mathbb{R}^n$ 中所有连续函数组成的集合, $\mathcal{K}_n^n$ 表示 $\mathbb{R}^n$ 中所有 $n$ 维凸体组成的集合. 设 $Z : L_c^1(\mathbb{R}^n) \to C(\mathbb{R}^n)$.

若对所有 $f \in L_c^1(\mathbb{R}^n)$, $\varphi \in \mathrm{GL}(n)$ 以及 $x \in \mathbb{R}^n$

$$Z(f \circ \varphi^{-1})(x) = |\det \varphi| Z(f)(\varphi^t x),$$

都成立, 则称映射 $Z : L_c^1(\mathbb{R}^n) \to C(\mathbb{R}^n)$ 是 $\mathrm{GL}(n)$ 协变的. 其中 $\varphi^{-1}$, $|\det \varphi|$, $\varphi^t$ 分别表示线性变换 $\varphi$ 的逆, 行列式的绝对值, 转置. 特别地, 若 $\varphi \in \mathrm{GL}(n)$ 的行列式是正的, 则称 $Z$ 是正 $\mathrm{GL}(n)$ 协变. 映射 $Z : L_c^1(\mathbb{R}^n) \to C(\mathbb{R}^n)$ 称为是对数平移协变的若

$$Z(f(\cdot - t))(x) = e^{-x \cdot t} Z(f)(x),$$

对所有 $f \in L_c^1(\mathbb{R}^n)$ 以及 $t, x \in \mathbb{R}^n$ 都成立.

设 $f \in L_c^1(\mathbb{R}^n)$. 函数 $f$ 的 Laplace 变换定义为

$$\mathcal{L} f(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(y) e^{-x \cdot y} dy,$$

其中 $x \in \mathbb{R}^n$, $x \cdot y$ 表示向量 $x$ 和 $y$ 的内积. Laplace 变换是数学中一个重要概念, 在解常系数的二阶常微分方程中有重要应用. 并且在许多工程技术和科学研究领域中有着广泛的应用, 特别是在力学系统、电学系统、自动控制系统、可靠性系统以及随机服务系统等系统科学中都起着重要作用 (此处参考百度百科).

本文首先研究了凸体 $K$ 的特征函数 $\mathbf{1}_K(x)$ (即: $\mathbf{1}_K(x) = 1$ 当 $x \in K$, $\mathbf{1}_K(x) = 0$ 当 $x \notin K$) 的 Laplace 变换:

$$\mathcal{L} K(x) = \mathcal{L} \mathbf{1}_K(x) = \int_K e^{-x \cdot y} dy.$$

作者们首次利用 Laplace 变换刻画了凸体空间上连续的, 正 $\mathrm{GL}(n)$ 协变的以及对数平移协变的赋值. 以下是主要结果之一:

**定理** 1. *映射 $Z : \mathcal{K}_n^n \to C(\mathbb{R}^n)$ 是连续的, 正 $\mathrm{GL}(n)$ 协变的以及对数平移协变的赋值当且仅当存在一个实数 $c$ 使得*

$$ZK = c \mathcal{L} K,$$

*对所有 $K \in \mathcal{K}_n^n$ 均成立.*

不难发现, $\mathcal{L} K(0)$ 等于凸体 $K$ 的 $n$ 维体积. 因此, 定理 1 是 Klain [5] 关于凸体空间上连续的刚性运动不变的简单赋值的推广.

另一方面, 作者们还研究了函数空间的赋值.

**定理** 2. *映射 $Z : L_c^1(\mathbb{R}^n) \to C(\mathbb{R}^n)$ 是连续的, 正 $\mathrm{GL}(n)$ 协变的以及对数平移协变的赋值当且仅当存在一个 $\mathbb{R}$ 上的连续函数 $h$ 使得*

$$Z(f) = \mathcal{L}(h \circ f),$$

对所有 $f \in L_c^1(\mathbb{R}^n)$ 均成立, 其中函数 $h$ 满足

$$h(0) = 0,$$

存在一个常数 $\gamma > 0$ 使得

$$|h(\alpha)| \le \gamma |\alpha|,$$

对任意的 $\alpha \in \mathbb{R}$.

本文的主要贡献是深入研究了凸体空间和函数空间上的连续的, 正 $\mathrm{GL}(n)$ 协变的以及对数平移协变的赋值问题, 并利用 Laplace 变换将它们唯一刻画. 一方面, 本文推动了凸体空间上赋值理论的研究. 另一方面, 本文提供了凸体空间和函数空间之间一种新的联系.

## References


[1] A. Colesanti, N. Lombardi and L. Parapatits, Translation invariant valuations on quasi-concave functions, Studia Math., 243 (2018), no.1, 79-99.

[2] A. Colesanti, M. Ludwig and F. Mussnig, Valuations on convex functions, Int. Math. Res. Not., 2019 (2019), no.8, 2384-2410.

[3] A. Colesanti, M. Ludwig and F. Mussnig, Minkowski valuations on convex functions, Calc. Var. PDE., 56 (2017) no. 6, Art. 162, 29pp.

[4] H. Hadwiger, Vorlensungen über Inhalt, Oberfläche und Isoperimetrie, Springer, Berlin, 1957.

[5] D.A. Klain, A short proof of Hadwiger's characterization theorem, Mathematika 42 (1995) no.2, 329-339.

[6] M. Ludwig, Valuations on function spaces, Adv. Geom., 11 (2011), 745-756.

[7] M. Ludwig, Valuations on Sobolev spaces, Amer. J. Math., 134 (2012), 827-842.

[8] F. Mussnig, Volume, polar volume and Euler characteristic for convex functions, Adv. Math., 344 (2019), 340-373.

[9] R. Schneider, Convex Bodies: The Brunn-Minkowski Theory, Encyclopedia of Mathematics and its Applications, 44, Cambridge University Press, Cambridge, (2014).

[10] A. Tsang, Valuations on $L^p$ spaces, Int. Math. Res. Not., 20 (2010), 3993-4023.

[11] A. Tsang, Minkowski valuations on $L^p$ spaces, Trans. Amer. Math. Soc., 364 (2012), no. 12, 6159-6186.