

数学研究及评论

Mathematical Research with Reviews

Issue 2 (2019) Art.5

© Prior Science Publishing

Fang, Quanlei (方全蕾); Xia, Jingbo (夏经博)

On the essential normality of principal submodules of the Drury-Arveson module

Indiana Univ. Math. J. 67 (2018), no. 4, 1439–1498.

评论员：赵翀 (山东大学，济南)

收稿日期：2019年10月10日

用 \mathcal{A} 表示多项式环，如果能在Hilbert空间 H 上建立同态 $\mathcal{A} \rightarrow B(H)$ 从而赋予模结构，则称 H 为一个Hilbert模(module). 例如复单位球 B_n 上的Hardy空间或者加权Bergman空间，都可以自然地用乘法赋予 $\mathbb{C}[z_1, \dots, z_n]$ -模结构，使其成为Hilbert模。如果 \mathcal{A} 在Hilbert模 H 上的作用生成的 C^* -子代数在模掉紧算子代数之后成为交换代数，则称 H 为本质正规的(essentially normal). Hilbert 模的本质正规性与代数几何、 C^* -代数扩张、BDF-理论、指标理论等数学分支具有广泛的联系，因而成为Hilbert模几何分析的中心问题之一。在该问题的研究中，尤以 B_n 上的解析函数Hilbert模的本质正规性受到关注最多，其研究方法也最具代表性。其中最有意义的是Drury-Arveson模 H_n 的子模和商模的本质正规性，原因在于在高维的压缩模都可以看作 $H_n \otimes \mathbb{C}^r$ (r 为正整数)的商模。 H_n 也是最难分析的，因为没有测度与之关联，可用的研究工具就少得多。

方全蕾和夏经博致力于用调和分析的方法研究 B_n 上的本质正规性问题。他们在本文中证明了，当 B_n 上的加权Bergman模的权 $t > -3$ 时，其主子模都是本质正规的，因而当 $n = 2$ 时，Drury-Arveson 模 H_2 的由多项式生成的子模都是本质正规的；当 $n \geq 3$ 并且加权Bergman模的权 $t = -3$ 时，如果多项式 $q \in \mathbb{C}[z_1, \dots, z_n]$ 的径向导数 $Rq = \sum_{k=1}^n z_k \partial_k q$ 在 $Z(q) \cap S$ 上没有零点，并且零簇 $Z(q)$ 与

单位球面 S 横截, 那么 q 生成的 (-3) -加权Bergman子模是本质正规的, 特别地, H_3 的由 q 生成的主子模是本质正规的。

在 B_n 上对于由单个多项式生成的主子模的本质正规性的研究, 起始于郭坤宇和王凯的工作[GW], 他们在 H_n 上证明了对 m 次齐次多项式 p , 存在常数 C 使不等式

$$M_p^* M_p \geq C(R + m)^{-1} \sum_{k=1}^n M_{\partial_j p}^* M_{\partial_j p}$$

成立(其中 M_p 表示由多项式 p 定义的乘法算子), 并据此证明了齐次的主子模的本质正规性。R. G. Douglas和王凯[DW]利用调和分析的方法深化了这一思路, 在Bergman空间上证明了由多项式生成的一般的主子模的本质正规性。本文的作者[FX]利用更为深刻的调和分析方法, 将以上结果推广到某些不具有关联测度的空间, 证明了权 $t > 2$ 时多项式主子模的本质正规性。

本文对 $t \in [-n, \infty)$ 和 $\epsilon \in [0, 1)$ 定义了函数类

$$\mathcal{P}_n(t, \epsilon) := \{q \in \mathbb{C}[z_1, \dots, z_n] : \exists C > 0, \|fRq\|_{t+3} \leq C\|qf\|_{t+1-\epsilon}, \forall f \in \mathbb{C}[z_1, \dots, z_n]\},$$

证明了在 $t \geq 3$ 时, $q \in \mathcal{P}_n(t, \epsilon)$ 足以保证子模 $[q]^{(t)}$ 的本质正规性; 进而通过证明在 $t \in (-3, 2]$ 时成立 $\mathcal{P}_n(t, 0) = \mathbb{C}[z_1, \dots, z_n]$, 得到了 $t > -3$ 时主子模的本质正规性。相比于作者之前的贡献[FX], 本文将 t 的取值范围从 $t > -2$ 扩大到了 $t > -3$, 从而把一个Drury-Arveson模 H_2 囊括在内, 这是一个突破性的进步; 进而, 本文还在 $t = -3$ 时得到具有广泛意义的成果, 从而在 H_3 获得了有意义的结论。

基于以上理由, 强烈推荐算子理论和调和分析相关的研究人员和爱好者研习本文, 并在此基础上寻求新的突破。

REFERENCES

- [DW] R. Douglas and K. Wang, *A harmonic analysis approach to essential normality of principal submodules*, J. Funct. Anal. **261** (2011), 3155-3180.
- [GW] K. Guo and K. Wang, *Essentially normal Hilbert modules and K-homology*, Math. Ann. **340** (2008), 907-934.
- [FX] Q. Fang and J. Xia, *Essential normality of polynomial-generated submodules: Hardy space and beyond*, J. Funct. Anal. **265** (2013), no. 12, 2991-3008.