数学研究及评论

Mathematical Research with Reviews

Issue 2 (2019) Art.37

Cheng, Shun-Jen (程舜仁); Lam, Ngau (林牛); Wang, Weiqiang (王伟强)

Super duality and irreducible characters of ortho-symplectic Lie superalgebras

Invent. Math. 183 (2011), no. 1, 189–224.

评论员：罗栗 (华东师范大学，上海)

收稿日期：2019年12月16日

李超代数作为李代数的 $\mathbb{Z}_2$-阶化推广，是理论物理中描述超对称现象的重要数学工具。早在上个世纪七十年代，Kac [9] 就已经对复数域上的有限维单李超代数进行了完整的分类：

(1) 有限维单李代数;

(2) A 型, $\mathfrak{osp}$ 型;

(3) 例外型 $D(2|1,\alpha)$, $F(3|1)$, $G(3)$;

(4) 奇异型 $\mathfrak{p}(n)$, $\mathfrak{q}(n)$;

(5) Cartan 型 $W(n)$, $S(n)$, $\widetilde{S}(2n)$, $H(n)$.

包含于上述 (2) 和 (3) 中的几类单李超代数被统称为基本典型李超代数，它们与单李代数有很多相似之处，比如都可以引入根系、Dynkin 图、三角分解、Cartan 子代数和 Borel 子代数、（抛物）范畴 $\mathcal{O}$ 等等概念。尽管 Kac [9, 10] 已经给出了这些李超代数的所有有限维单模的分类，但其中仅有最高权是典型 (typical) 权的单模可以写出类似于单李代数的 Weyl 特征标公式。

而对于以非典型 (atypical) 权作为最高权的单模，如何获取其特征标公式是一个非常具有挑战性的问题。直到1996年，Serganova [11] 借助某些同调环定义了 Kazhdan-Lusztig 多项式，进而第一个给出了 A 型李超代数（或等价地, 一般

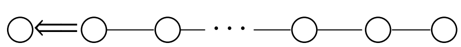
线性李超代数 $\mathfrak{gl}(m|n)$）的所有有限维单模的特征标。2003年，Brundan [3] 利用量子群 $U_q(\mathfrak{gl}_\infty)$ 与 A 型 Hecke 代数之间的 Schur-Jimbo 对偶，猜想 $\mathfrak{gl}(m|n)$ 的范畴 $\mathcal{O}$ 中的 Kazhdan-Lusztig 多项式可通过 $V^{*m}\otimes V^n$ 上的（对偶）典范基与单项式基之间的转换关系得到，其中 V 是 $U_q(\mathfrak{gl}_\infty)$ 的自然模，V^* 是 V 的对偶模。Brundan 证明了在 $\mathfrak{gl}(m|n)$ 的有限维模范畴 $\mathcal{F}$ 中，上述猜想所刻画的 Kazhdan-Lusztig 多项式与典范基的这一联系是成立的，从而纯代数化地重新得到了 $\mathfrak{gl}(m|n)$ 的所有有限维单模的特征标。Brundan 的前述猜想（在范畴 $\mathcal{O}$ 中）由程舜仁、林牛和王伟强 [5] 于2015年证明。目前这一结果已被鲍涣辰和王伟强 [1, 2] 进一步推广至 $\mathfrak{osp}$ 型。

在 Brundan [3] 工作之后，程舜仁、王伟强和张瑞斌 [8] 建立了 $\mathfrak{gl}(m|n)$ 的（Levi 子代数 $\mathfrak{gl}(m)\oplus\mathfrak{gl}(n)$ 对应的）抛物范畴 $\mathcal{O}$ 与 $\mathfrak{gl}(m+n)$ 的抛物范畴 $\mathcal{O}$ 之间的联系，从而可利用 A 型李代数的 Kazhdan-Lusztig 多项式刻画 $\mathfrak{gl}(m|n)$ 的抛物范畴 $\mathcal{O}$ 中单模的特征标，而有限维模范畴 $\mathcal{F}$ 正是其中的特殊情况。不久程舜仁和王伟强 [6] 猜想 [8] 中的结论可以进一步推广到更广泛的 Levi 子代数对应的抛物范畴，并给出了更一般的 A 型超对偶的具体构造。这一 A 型超对偶猜想由程舜仁和林牛 [4] 于2010年证明。本文所评论的文章则是将 [6, 4] 中的 A 型超对偶进一步推广至 $\mathfrak{osp}$ 型，即建立了 $\mathfrak{osp}$ 型李超代数的抛物范畴 $\mathcal{O}$ 与 BCD 型典型李代数的抛物范畴 $\mathcal{O}$ 之间的范畴等价。特别地，这个等价的一个比较弱的形式（Grothendieck 群的水平上）已经可以通过 BCD 型的抛物 Kazhdan-Lusztig 多项式给出 $\mathfrak{osp}$ 的所有有限维单模特征标。

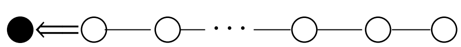
下面我们来具体描述被评论文章中构造的与 $\mathfrak{osp}$ 相关的超对偶。

文中取定四类 Dynkin 图：

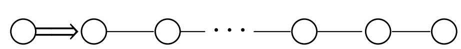
$\mathfrak{b}$:



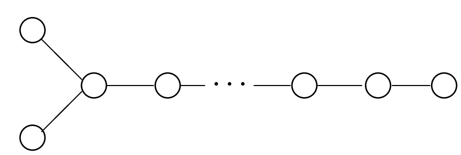
$\mathfrak{b}^\bullet$:



$\mathfrak{c}$:

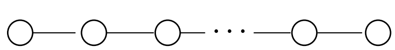


$\mathfrak{d}$:



它们分别对应李（超）代数 $\mathfrak{so}(2m+1)$, $\mathfrak{osp}(1|2m)$, $\mathfrak{sp}(2m)$ 和 $\mathfrak{so}(2m)$. 再引入三类 Dynkin 图：

$\boxed{\mathfrak{T}_n}$



$$\boxed{\overline{\mathfrak{T}}_n} \qquad \otimes - \bigcirc - \bigcirc - \cdots - \bigcirc - \bigcirc$$

$$\boxed{\widetilde{\mathfrak{T}}_n} \qquad \otimes - \otimes - \otimes - \cdots - \otimes - \otimes$$

它们分别对应李（超）代数 $\mathfrak{gl}(n+1), \mathfrak{gl}(1|n)$ 和 $\mathfrak{gl}(n|n+1)$.

取定 $\mathfrak{x} = \mathfrak{b}, \mathfrak{b}^\bullet, \mathfrak{c}, \mathfrak{d}$，将其最右端点与 $\boxed{\mathfrak{T}_n}$, $\boxed{\overline{\mathfrak{T}}_n}$ 和 $\boxed{\widetilde{\mathfrak{T}}_n}$ 的最左端点分别用单线相连，得到如下 Dynkin 图:

$$\boxed{\mathfrak{x}} - \boxed{\widetilde{\mathfrak{T}}_n} \qquad \boxed{\mathfrak{x}} - \boxed{\mathfrak{T}_n} \qquad \boxed{\mathfrak{x}} - \boxed{\overline{\mathfrak{T}}_n}$$

对应的李（超）代数分别记为 $\mathfrak{g}_n, \overline{\mathfrak{g}}_n$ 和 $\widetilde{\mathfrak{g}}_n$，其中的 $\overline{\mathfrak{g}}_n$ 正是 $\mathfrak{osp}$ 李超代数。由于一些技术上的需要，文中实际是以相应的中心扩张代数取代了原 $\mathfrak{g}_n, \overline{\mathfrak{g}}_n, \widetilde{\mathfrak{g}}_n$. 上述 Dynkin 图可确定 $\mathfrak{g}_n, \overline{\mathfrak{g}}_n, \widetilde{\mathfrak{g}}_n$ 相应的 Borel 子代数（注意李超代数不同的 Borel 子代数之间不一定互相共轭）。取定 $\mathfrak{x}$ 中的一些单根，同时分别取 $\mathfrak{T}_n, \overline{\mathfrak{T}}_n, \widetilde{\mathfrak{T}}_n$ 中除了最左边点对应单根外的所有单根，由这些单根的选取方式可确定 $\mathfrak{g}_n, \overline{\mathfrak{g}}_n, \widetilde{\mathfrak{g}}_n$ 中相应的 Levi 子代数。进而可确定 $\mathfrak{g}_n, \overline{\mathfrak{g}}_n, \widetilde{\mathfrak{g}}_n$ 相应的抛物范畴 $\mathcal{O}_n, \overline{\mathcal{O}}_n, \widetilde{\mathcal{O}}_n$.

由无穷序列 $\mathfrak{g}_1 \subset \mathfrak{g}_2 \subset \cdots \subset \mathfrak{g}_n \subset \cdots$ 可定义 $\mathfrak{g} := \bigcup_{n=1}^\infty \mathfrak{g}_n$. 进而由逆向极限 $\varprojlim \mathcal{O}_n$ 可确定一个 $\mathfrak{g}$-模范畴 $\mathcal{O}$. 类似地，还可定义 $\overline{\mathfrak{g}}, \widetilde{\mathfrak{g}}$ 及 $\overline{\mathcal{O}}, \widetilde{\mathcal{O}}$. 此外，可引入相应的截断函子 $\mathrm{tr}_n^k : \overline{\mathcal{O}}_k \to \overline{\mathcal{O}}_n, (k > n)$. 它将抛物 Verma 模映到抛物 Verma 模或零，将不可约模映到不可约模或零。籍此便可由 $\overline{\mathcal{O}}$ 中的不可约特征标获取 $\overline{\mathcal{O}}_n$ 中不可约特征标。

由于 $\mathfrak{g}, \overline{\mathfrak{g}}$ 都可自然地看作 $\widetilde{\mathfrak{g}}$ 的子代数，因此可自然地定义函子 $T : \widetilde{\mathcal{O}} \to \mathcal{O}$ 和 $\overline{T} : \widetilde{\mathcal{O}} \to \overline{\mathcal{O}}$. 程舜仁，林牛和王伟强在论文中证明了 T 和 $\overline{T}$ 都是范畴等价，它们将抛物 Verma 模映到抛物 Verma 模，把不可约模映到不可约模。借助 T 和 $\overline{T}$, 我们得到了 $\mathcal{O}$ 和 $\overline{\mathcal{O}}$ 之间的范畴等价，此即为超对偶。利用该超对偶以及前述截断函子 tr_n^k, 我们便可借助 BCD 型李代数相应的抛物 Kazhdan-Lusztig 多项式得到 $\mathfrak{osp}$ 型李超代数 $\overline{\mathfrak{g}}_n$ 的模范畴 $\overline{\mathcal{O}}_n$ 中不可约特征标，这其中包括了所有的有限维不可约特征标。

关于超对偶的更系统的介绍可参见程舜仁和王伟强的专著 [7].

References

[1] H. Bao, *Kazhdan-Lusztig theory of super type D and quantum symmetric pairs*, Represent. Theory **21** (2017), 247–276.

[2] H. Bao and W. Wang, *A new approach to Kazhdan-Lusztig theory of type B via quantum symmetric pairs*, Astérisque, no. **402**, 2018, vii+134 pp.

[3] J. Brundan, *Kazhdan-Lusztig polynomials and character formulae for the Lie superalgebra* $\mathfrak{gl}(m|n)$, J. Amer. Math. Soc. **16** (2003), 185–231.

[4] S.-J. Cheng and N. Lam, *Irreducible characters of the general linear superalgebra and super duality*, Comm. Math. Phys. **298** (2010), 645–672.

[5] S.-J. Cheng, N. Lam and W. Wang, *Brundan-Kazhdan-Lusztig conjecture for general linear Lie superalgebras*, Duke J. Math. **164** (2015), 617–695.

[6] S.-J. Cheng and W. Wang, *Brundan-Kazhdan-Lusztig and super duality conjectures*, Publ. Res. Inst. Math. Sci. **44** (2008), 1219–1272.

[7] S.-J. Cheng and W. Wang, Dualities and Representations of Lie superalgebras. Graduate Studies in Math. **144**. American Mathematical Society, Providence, RI, 2012.

[8] S.-J. Cheng, W. Wang and R. Zhang, *Super duality and Kazhdan-Lusztig polynomials*, Trans. Amer. Math. Soc. **360** (2008), 5883–5924.

[9] V. Kac, *Lie superalgebras*, Adv. Math. **16** (1977), 8–96.

[10] V. Kac, *Characters of typical representations of classical Lie superalgebras*, Comm. Alg. **5** (1977), 889–897.

[11] V. Serganova, *Kazhdan-Lusztig polynomials and character formula for the Lie superalgebra* $\mathfrak{gl}(m|n)$, Selecta. Math. (N.S.) **2** (1996), 607–651.