数学研究及评论
Mathematical Research with Reviews
Issue 2 (2019) Art.21

Pflaum, Markus J.; Posthuma, Hessel; Tang, Xiang (唐翔)
The transverse index theorem for proper cocompact actions of Lie groupoids
J. Differential Geom. 99 (2015), no. 3, 443–472.

评论员：王航 (华东师范大学算子代数研究中心，上海)
收稿日期：2019年11月3日

椭圆算子的指标理论是一个联系分析、拓扑和整体几何不变量的综合理论. 紧流形M的椭圆算子D是Fredholm算子. 它的Fredholm指标

$$\mathrm{ind}D = \dim(\ker D) - \dim(\mathrm{cocker}D)$$

可由K-理论表示:

$$\mathrm{ind}D \in K_0(\Psi^{-\infty}(M)) \cong \mathbb{Z},$$

这里$\Psi^{-\infty}(M)$代表的是M上的光滑拟微分算子所构成的代数. 算子的迹映射诱导了以上K-理论与整数的同构 $\mathrm{Tr} \in \mathrm{Hom}(K_0(\Psi^{-\infty}(M)), \mathbb{Z})$. 算子$D$的指标可由著名的Atiyah-Singer指标公式计算, 这是通过局部化的方式获得的, 如热核或者形变量子化或者形变群胚等等. 因而, Atiyah-Singer指标公式可以用以下配对的方式来表达：

$$\langle \mathrm{ind}D, \mathrm{Tr}\rangle = \int_{T^*M} \mathrm{ch}(\sigma_D)\mathrm{Todd}(TM \otimes \mathbb{C}).$$

设流形M的基本群为Γ, 则椭圆算子D存在着一个高指标$\mathrm{Ind}D \in K_0(\Psi_\Gamma^{-\infty}(\tilde{M}))$. 这里$\Psi_\Gamma^{-\infty}(\tilde{M})$是$M$的万有覆盖$\tilde{M}$ 上的Γ-不变的光滑拟微分算子构成的代数. 这个高指标和群上同调$H^*(\Gamma, \mathbb{Z})$有一个自然的配对. 1990年, Connes-Moscovici找到了这个指标配对的公式, 并且用这个公式证明了双曲群的Novikov猜测, 这是一个经典的结果. 本文将这一结果的指标配对公式从基本群Γ在$\tilde{M}$上自由作用的指

标公式推广到了李群胚G proper 余紧的作用在光滑流形Z的情形. 这个指标公式涵盖了广泛的结果, 例如：1982年Connes-Moscovici的李群齐次空间上的L^2-指标公式[1], 以及2014年评论员得到的proper群作用不变的椭圆算子的L^2-指标公式[2]. 这里的L^2对应着高指标和群代数上的von Neumann代数的迹的配对, 而本文是把von Neumann 代数的迹推广到群（胚）的任意上同调类, 可以通过具体计算公式获得椭圆算子高指标更为精细的信息.

以下我们对本文的设定以及主要结论进行归纳.

设李群胚 $G \rightrightarrows M$ 在光滑流形Z上有一个 proper 且余紧（Z/G是紧的）的作用. 由于这个作用确定的动量映射(moment map) $\mu : Z \to M$是一个满的浸入映射, 所以对于$z \in Z$, 微分映射 $T\mu : T_z Z \to T_{\mu(z)}(M)$ 给出了流形 Z 上的一个常规叶状结构(regular foliation). 这个叶状结构$(Z, \mathcal{F})$ 有一个自然的群胚作用, 考虑上面的 G 不变椭圆微分算子D, 即在叶子方向上椭圆且关于群胚作用不变的算子. 由椭圆算子的性质, 存在另一个椭圆算子 Q 使得 $DQ-1, QD-1$ 是光滑算子. 记$\Psi^{-\infty}_{inv}(G,Z)$ 为 G 上所有有光滑核的G-不变的有界算子的所构成的代数, 则算子 D 可看为是所有拟微分算子模掉$\Psi^{-\infty}_{inv}(G,Z)$的商代数中的可逆元, 因而$K$-理论的边界映射定义了$D$ 的K-理论指标

$$\mathrm{Ind} D \in K_0(\Psi^{-\infty}_{inv}(G,Z)).$$

本文通过与群胚 G 的微分上同调 $H^*_{\mathrm{diff}}(G,L)$ 配对的方式, 定义了一系列的数量指标

$$K_0(\Psi^{-\infty}_{inv}(G,Z)) \times H^*_{\mathrm{diff}}(G,L) \to \mathbb{C} \quad (\mathrm{Ind}D, \alpha) \to \langle \mathrm{Ind}D, \alpha \rangle.$$

并给出了由群胚上同调给出的计算公式. 这里上同调中 L 是群胚G表示的某横截密度, 用来处理群胚非unimodular情形, 对unimodular情形下的定义进行推广.

本文分为两个步骤得到计算公式, 首先是对$K_0(\Psi^{-\infty}_{inv}(G,Z))$ 和 $H^*_{\mathrm{diff}}(G,L)$ 分别做局部化, 其次是利用代数指标定理的形变量子化的方法. 对于指标 $\mathrm{Ind}D$ 所在的K-理论元素, 通过把它的代表元的光滑算子替换成具有支撑在对角线附近的核的算子, 算子D也可以定义一个局部化的K-理论中的指标

$$\mathrm{Ind}_{loc} D \in K_0^{loc}(\Psi^{-\infty}_{inv}(G,Z)).$$

这个局部化的指标和原指标在以下由嵌入诱导的K-理论映射中有着对应关系：

$$K_0^{loc}(\Psi^{-\infty}_{inv}(G,Z)) \to K_0(\Psi^{-\infty}_{inv}(G,Z)) \quad \mathrm{Ind}_{loc}D \mapsto \mathrm{Ind}D.$$

关于$H^*_{\mathrm{diff}}(G,L)$的局部化, 对应着在本文中起着关键作用的van Est映射:

$$\Phi_Z : H^*_{\mathrm{diff}}(G) \to H^*_{\mathcal{F}}(Z, \mu^* L)^G.$$

映射的右侧是由Z上纤维方向上的G不变微分形式的de Rham上同调. 若群胚G是一个群, 这个映射的右边可化简为相对李代数的上同调群.

设π是纤维方向的切丛$T_\mu^*(Z)$到Z投影, $\hat{A}(\mathcal{F}^*)$是$\mathcal{F}$对应的纤维方向的余切丛$T_\mu^*\mathcal{F}$的$\hat{A}$-示性类, $\mathrm{ch}(\sigma_D)$是椭圆算子D的象征的叶状陈特征, 则本文的主要结论是：

Theorem 1. *设D是光滑流形M在群胚G余紧proper作用下的G-不变的纤维方向的椭圆算子, 设α是一个微分群胚上同调的任意元素, 则它与D的指标配对有如下的计算公式：*

$$\langle \mathrm{Ind} D, \alpha\rangle = \langle \mathrm{Ind}_{loc} D, \Phi_Z(\alpha)\rangle = \frac{1}{(2\pi i)^k}\int_{T_\mu^* Z} (c\circ\pi)\pi^*\alpha \wedge \hat{A}(\mathcal{F}^*)\wedge \mathrm{ch}(\sigma_D),$$

这里c是刻画群胚G的proper作用的在Z上定义的一个截断函数.

群胚及其上的椭圆算子的指标理论是非交换几何的一个研究热点. 本文作为其中的一个重要参考文献，思想深刻，逻辑清晰，启发性强，在李群的表示论中有潜在的应用. 强烈推荐本文给算子代数和微分几何的相关科研人员研习和参考.

References

[1] A. Connes, H. Moscovici, The L^2-index theorem for homogeneous spaces of Lie groups, Ann. Math. 115 (1982) 291–330.

[2] H. Wang, L^2-index formula for proper cocompact group actions, J. Noncommut. Geom. 8 (2014) 393–432.