数学研究及评论

Mathematical Research with Reviews

Issue 2 (2019) Art.16

Li, Songzi (李宋子); Li, Xiang-Dong (李向东)

$\mathcal{W}$-entropy formulas on super Ricci flows and Langevin deformation on Wasserstein space over Riemannian manifolds

Sci. China Math. 61 (2018), no. 8, 1385–1406.

评论员：王宇钊 (山西大学，太原)

收稿日期：2019年10月26日

这是一篇综述性文章, 作者对于他们最近一系列的研究工作给了一个详细而富有启发性的回顾, 主要包括黎曼流形和超Ricci流上Witten-Laplacian热方程的$\mathcal{W}$熵和黎曼流形Wasserstein空间上的Langevin形变两方面内容, 并且从统计力学和概率论的观点讨论了Ricci流上的$\mathcal{W}$-熵, 此外, 作者还给出了$\mathcal{W}$-熵这一课题中未来可能研究的若干问题并给出了有益的评论.

1982年, Hamilton引入Ricci流, 起初为了解决Poincaré猜想和Thurston几何化猜想(geometrization conjecture). 在2002年的预印本中, Perelman在Ricci流上引进$\mathcal{W}$-熵的概念

$$\mathcal{W}(g,f,\tau) := \int_M (\tau(R+|\nabla f|^2)+f-n)\frac{e^{-f}}{(4\pi\tau)^{\frac{n}{2}}}dv,$$

并证明如下$\mathcal{W}$-熵公式

$$\frac{d}{dt}\mathcal{W}(g,f,\tau) = 2\tau\int_M \left|\mathrm{Ric}+\nabla^2 f-\frac{1}{2\tau}g\right|^2 \frac{e^{-f}}{(4\pi\tau)^{\frac{n}{2}}}dv,$$

其中M为n维紧致流形, R和Ric分别表示数量曲率和Ricci曲率, 并且$(g(t), f(t), \tau(t))$满足

$$\begin{cases} \partial_t g = -2\mathrm{Ric}, \\ \partial_t f = -\Delta f + |\nabla f|^2 - R + \frac{n}{2\tau}, \\ \partial_t \tau = -1, \\ \int_M (4\pi\tau)^{-\frac{n}{2}} e^{-f} dv = 1. \end{cases}$$

尤其是$\mathcal{W}$-熵沿着Ricci流关于时间t是严格单调不减的除非$(M, g(\tau), f(\tau))$是收缩梯度孤立子, 即

$$\mathrm{Ric} + \nabla^2 f - \frac{1}{2\tau} g = 0.$$

作为应用, Perelman证明了局部非坍塌定理, 这为Hamilton证明几何化猜想的计划扫清了主要障碍, 在Poincaré猜想的最后解决中起到了关键作用.

由于$\mathcal{W}$-熵如此重要而且富有创造性, 自然有很多学者对其进行研究, 以期了解隐藏在背后的奥秘. 倪磊[9, 10]首先引入了黎曼流形上关于热方程的$\mathcal{W}$-熵

$$\mathcal{W}(f, t) := \int_M (t|\nabla f|^2 + f - n) \frac{e^{-f}}{(4\pi t)^{\frac{n}{2}}} dv,$$

并证明如下$\mathcal{W}$-熵公式

$$\frac{d}{dt}\mathcal{W}(f, t) = -2t \int_M \left(\left| \nabla^2 f - \frac{1}{2t} g \right|^2 + \mathrm{Ric}(\nabla f, \nabla f) \right) \frac{e^{-f}}{(4\pi t)^{\frac{n}{2}}} dv,$$

且当Ricci曲率非负时, 关于时间t是单调的. 随后, 李-徐[1]又将其推广到Ricci曲率下有界的情形.

1. Witten Laplacian热方程的$\mathcal{W}$-熵公式

受Perelman以及相关工作的启发, 李向东与合作者研究完备黎曼流形上Witten Laplacian热方程的$\mathcal{W}$-熵, 取得了一系列重要而有意义的成果, 并在所谓的曲率维数条件$CD(K, m)$下, 证明了$\mathcal{W}$-熵单调公式. 根据K, m取不同的符号, 可以分三种情形:

Theorem 1.1 ($CD(0, m)$情形[2], [3]). *设(M, g)是一紧致黎曼流形或者具有有界几何条件的完备黎曼流形, 函数φ满足, $\varphi \in C^4(M)$且$\nabla\varphi \in C_b^3(M)$. 令$m \in [n, \infty)$, u是热方程$Lu = \partial_t u$的正解. 定义信息熵和$\mathcal{W}$-熵分别为*

$$H_m(u) := -\int_M u \log u d\mu - \frac{m}{2}(1 + \log(4\pi t)), \quad W_m(u) := \frac{d}{dt}(tH_m),$$

则

$$W_m(u) = \int_M (t|\nabla f|^2 + f - m) u d\mu,$$

$$\frac{d}{dt}W_m(u) = -2\int_M t\left(\left|\nabla^2 f - \frac{g}{2t}\right|^2 + \mathrm{Ric}_{m,n}(L)(\nabla f, \nabla f)\right) ud\mu$$
$$- \frac{2}{m-n}\int_M t\left(\nabla\varphi\cdot\nabla f + \frac{m-n}{2t}\right)^2 ud\mu. \qquad (1)$$

以上结果推广了倪磊的工作, 与此同时利用扭积的方法给出倪磊工作的新的证明. 此外, 作者还证明了刚性定理, 即上述熵公式(1)为零时, (M, g)等距于n-维欧式空间.

Theorem 1.2 ($CD(K, m)$情形[2], [3]). *设u是热方程$Lu = \partial_t u$的基本解. 在定理1条件下定义修正的信息熵和$\mathcal{W}$- 熵分别为*

$$H_{m,K}(u) := -\int_M u\log u d\mu - \frac{m}{2}(1+\log(4\pi t)) - \frac{m}{2}Kt\left(1+\frac{1}{6}Kt\right)$$

和

$$W_m(u) := \frac{d}{dt}(tH_{m,K}),$$

则

$$W_{m,K}(u) = \int_M (t|\nabla f|^2 + f - m(1+\frac{1}{2}Kt)^2)ud\mu,$$

$$\frac{d}{dt}W_{m,K}(u) = -2t\int_M \left(\left|\nabla^2 f - \left(\frac{1}{2t}+\frac{K}{2}\right)g\right|^2 + (\mathrm{Ric}_{m,n}(L)+Kg)(\nabla f, \nabla f)\right) ud\mu$$
$$- \frac{2}{m-n}\int_M t\left(\nabla\varphi\cdot\nabla f + (m-n)\left(\frac{1}{2t}+\frac{K}{2}\right)\right)^2 ud\mu.$$

当$m = \infty$时, 不能像以上那种方式来定义$\mathcal{W}$-熵, 作者基于Bakry-Ledoux的逆对数Sobolev不等式, 证明了在$CD(K, \infty)$条件下的$\mathcal{W}$-熵公式.

Theorem 1.3 ($CD(K, \infty)$情形[4]). *设(M, g)是一具有有界几何条件的完备黎曼流形, 函数φ满足, $\varphi \in C^4(M)$ 且$\nabla\varphi \in C_b^3(M)$. 假定$\mathrm{Ric} + \nabla^2\varphi \geq -Kg$, $K \in \mathbb{R}$. 令$u(\cdot, t) = P_t f$是热方程$Lu = \partial_t u$ 的正解, $u(x, 0) = f$. 定义信息熵和$\mathcal{W}$-熵分别为*

$$H_K(f, t) := D_K(t)\int_M (f\log f - P_t f\log P_t f)d\mu,$$

和

$$W_K(u) := H_K(f, t) + \frac{\sinh(2Kt)}{2K}\frac{d}{dt}H_K(f, t),$$

其中$D_0 = \frac{1}{t}$, $D_K(t) = \frac{2K}{1-e^{-2Kt}}$, $K \neq 0$. 则对于所有的$t > 0$有

$$\frac{d}{dt}H_K(f, t) \leq 0,$$

和

$$\frac{d}{dt}W_K(u) = -\left(1+e^{2Kt}\right)\int_M \left(|\nabla^2 \log P_f|^2 + (\mathrm{Ric}(L)-Kg)(\nabla \log P_t f, \nabla \log P_t f)\right) P_t f d\mu. \tag{2}$$

此外, 当等式(2)右边为零时当前仅当(M,g,φ)是*K-Ricci*孤立子, 即 $\mathrm{Ric}+\nabla^2\varphi = Kg$.

另一方面, 作者还将以上三种情形的$\mathcal{W}$-熵公式推广到了更一般的(K,m)-超Ricci流情形,

$$\frac{1}{2}\frac{\partial g}{\partial t} + \mathrm{Ric}_{m,n}(L) \geq Kg.$$

具体形式请读者参考原文[4, 7], 在这里不再敖述.

2. Wasserstein空间上测地流的$\mathcal{W}$-熵公式

本文的第二部分内容研究最优传输中Wasserstein空间上测地流与$\mathcal{W}$-熵的关系. Monge-Kantorovich最优传输理论自从上世纪九十年代Brenier一系列重要的工作之后, 经Otto, Lott-Villani, Sturm等人进一步的推动, 有了长足的发展, 尤其是发展了一套无穷维黎曼几何以及Wasserstein空间上的梯度流方法. 沿着Wasserstein空间中测地线, 他们利用熵泛函的位移凸性给出了度量测度空间中Ricci曲率的综合定义. Lott将其推广到Ricci流情形, 并且与Perelman的$\mathcal{W}$-熵单调性建立关系. 在[5]中, 李宋子-李向东证明了测地流下的$\mathcal{W}$-熵公式并将Lott的凸性结果推广到倒向Perelman Ricci流情形.

Theorem 2.1 ([5]). *设(M,g)是一紧致黎曼流形, 函数φ满足, $\varphi \in C^2(M)$, $d\mu = e^{-\varphi}dv$为一加权体积测度. 设(ρ, f) 是传输方程和Hamilton-Jacobi方程的解*

$$\begin{cases} \partial_t \rho - \nabla^*_\mu(\rho\nabla f) = 0, \\ \partial_t f + \frac{1}{2}|\nabla f|^2 = 0. \end{cases}$$

定义H_m-熵和W_m-熵分别为

$$H_m(\rho,t) := \int_M \rho\log\rho d\mu - \frac{m}{2}(1+\log(4\pi t^2)), \quad W_m(u) := \frac{d}{dt}(tH_m(\rho,t)),$$

则对所有$t>0$,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}W_m(\rho,t) = &-t\int_M \left(\left|\nabla^2 f - \frac{g}{t}\right|^2 + \mathrm{Ric}_{m,n}(L)(\nabla f,\nabla f)\right)\rho d\mu \\ &- \frac{t}{m-n}\int_M \left(\nabla\varphi\cdot\nabla f + \frac{m-n}{t}\right)^2 \rho d\mu. \end{aligned}$$

特别地, 当$\mathrm{Ric}_{m,n}(L)\geq 0$时, $W_m(\rho,t)$关于时间t沿着测地流是不增的.

作为推论, 可以重新证明Lott-Villani的一个凸性结果, 即当$\mathrm{Ric}_{m,n}(L) \geq 0$时,

$$\int_M t\rho \log \rho d\mu + mt \log t$$

关于时间t沿着测地流是凸的.

受Bismut关于黎曼流形余切丛上的亚椭圆Laplacian算子形变理论的启发, 作者在Wasserstein空间切丛上引入测地流的Langevin形变, 同时证明了在测地流和梯度流之间的Langevin形变的存在性与唯一性. 进一步把$\mathcal{W}$-熵公式推广到Langevin形变流的情形. 更精确地说, 对于常数$c \in (0, \infty)$, 设(ρ, f)为下列方程组的解

$$\begin{cases} \partial_t \rho - \nabla_\mu^*(\rho \nabla f) = 0, \\ c^2 \left(\partial_t f + \frac{1}{2}|\nabla f|^2 \right) = -f + V'(\rho). \end{cases}$$

此方程组可以看做Hamilton-Jacobi方程(测地流, $c \to \infty$)和倒向热方程(梯度流, $c \to 0$) 的Langevin形变. 他们亦可以将$\mathcal{W}$-熵公式推广到Langevin形变流的情形.

紧接着, 作者阐述了Perelman从统计力学的角度引入$\mathcal{W}$-熵公式, 并且从概率论的观点解释了Perelman的$\mathcal{W}$-熵以及在曲率维数条件下Witten Laplacian 热方程的$\mathcal{W}$-熵公式. 在文章的最后部分, 作者提出了七个与$\mathcal{W}$-熵有关的相关问题或者未来待研究的课题. 每一个问题都有详细的解释和最新的进展说明, 为进一步的研究指明了方向. 具体说来,

(1): $\mathcal{W}$-熵与微分Harnack不等式;
(2): $\mathcal{W}$-熵与度量测度空间$RCD(K, m)$上的刚性定理;
(3): 在具有边界流形上的$\mathcal{W}$-熵;
(4): $(K(t), m)$-超Ricci流下的$\mathcal{W}$-熵;
(5): 在$CD(K(\cdot), m)$-条件下Witten Laplacian的$\mathcal{W}$-熵;
(6): 对于非线性扩散的$\mathcal{W}$-熵与刚性定理;
(7): 对于Ricci流或超Ricci流典则系综的构建.

作者最后重申, 熵是在许多数学、物理、信息论等学科中的一个非常有用的工具, 熵方法用来刻画系统的平衡态和不可逆性, 也用来刻画系统的不确定性. 这篇文章结合作者自己的研究经历, 综述了与$\mathcal{W}$-熵相关的几何、分析、概率等, 如有对这些交叉方向感兴趣的读者, 这是一篇非常值得一读的文章.

References

[1] Li J, Xu X. Differential Harnack inequalities on Riemannian manifolds I: Linear heat equation. Adv Math, 2011, 226: 4456–4491

[2] Li X-D. Perelman's entropy formula for the Witten Laplacian on Riemannian manifolds via Bakry-Emery Ricci curvature. Math Ann, 2012, 353: 403-437.

[3] Li S, Li X-D. W-entropy formula for the Witten Laplacian on manifolds with time-dependent metrics and potentials. Pacific J Math, 2015, 278: 173-199.

[4] Li S, Li X-D. Harnack inequalities and W-entropy formula for Witten Laplacian on Riemannian manifolds with K-super Perelman Ricci flow. ArXiv:1412.7034, 2014

[5] Li S, Li X-D. W-entropy formulas and Langevin deformation of flows on Wasserstein space over Riemannian manifolds. ArXiv:1604.02596, 2016.

[6] Li S, Li X-D. On Harnack inequalities for Witten Laplacian on Riemannian manifolds with super Ricci flows. Asian J. Math, 2018, 22: 577-597.

[7] Li S, Li X-D. W-entropy, super Perelman Ricci flows and (K, m)-Ricci solitons. ArXiv:1706.07040, 2017.

[8] Li S, Li X-D. Hamilton differential Harnack inequality and W-entropy for Witten Laplacian on Riemannian manifolds. J. Funct Anal, 2018, 274: 3263-3290.

[9] Ni L. The entropy formula for linear equation. J Geom Anal, 2004, 14: 87–100

[10] Ni L. Addenda to "The entropy formula for linear equation". J Geom Anal, 2004, 14: 329–334