

## 数学研究及评论

Mathematical Research with Reviews

Issue 2 (2019) Art.15

© Prior Science Publishing

Ma, Pan (马攀); Zheng, Dechao (郑德超)

*Finite rank truncated Toeplitz operators via Hankel operators*

Proc. Amer. Math. Soc. 147 (2019), no. 6, 2573–2582.

评论员：刘永民 (江苏师范大学，徐州)

收稿日期：2019年10月21日

算子理论是泛函分析的重要组成部分. 作为是算子理论的重要分支, 解析函数空间上的算子理论, 一直得到国内外学者的持续关注. 人们已经知道Hardy空间上有界的Toeplitz算子的符号是唯一的, 而模型空间上有界的截断Toeplitz算子对应的符号是不唯一的. Baranov, Chalendar, Fricain 等人[1]已经构造出了没有有界符号的有界的截断Toeplitz算子. 这篇文章讨论了模型空间上有限秩截断Toeplitz算子的特征.

设 $\mathbb{C}$ 表示复平面,  $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ 表示 $\mathbb{C}$ 里开单位圆盘,  $\mathbb{T} = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$ 表示 $\mathbb{C}$ 里单位圆周. 记  $H(\mathbb{D})$ 为 $\mathbb{D}$ 上的解析函数类,  $L^2$ 表示 $\mathbb{T}$ 上平方可积函数的Lebesgu空间, Hardy空间 $H^2 = L^2 \cap H(\mathbb{D})$ . 设 $\theta$ 是一个非常数的内函数[2],  $K_\theta = H^2 \ominus \theta H^2$ , 正交投影

$$P_\theta : L^2 \rightarrow K_\theta.$$

对 $\varphi \in L^2$ , 定义具有符号 $\varphi$ 的截断Toeplitz算子

$$A_\varphi f = P_\theta(\varphi f), f \in K_\theta \cap L^\infty.$$

如果 $A_\varphi$ 的值域是有限维的, 就说 $A_\varphi$ 是有限秩的.

设  $k_\lambda^\theta = \frac{1-\theta(\lambda)\theta}{1-\lambda z}$  和  $\tilde{k}_\lambda^\theta = \frac{\theta-\theta(\lambda)}{z-\lambda}$ . 对  $h \in K_\theta$ , 令

$$\left(\tilde{k}_\lambda^\theta \otimes k_\lambda^\theta\right) h = \langle h, k_\lambda^\theta \rangle \tilde{k}_\lambda^\theta.$$

对整数  $n \geq 0$ ,  $\lambda \in \mathbb{D}$ , 设

$$D^n[\tilde{k}_\lambda^\theta \otimes k_\lambda^\theta] = \frac{\partial^n}{\partial \lambda^n} (\tilde{k}_\lambda^\theta \otimes k_\lambda^\theta)$$

及

$$\overline{D}^n[k_\lambda^\theta \otimes \tilde{k}_\lambda^\theta] = \frac{\partial^n}{\partial \bar{\lambda}^n} (k_\lambda^\theta \otimes \tilde{k}_\lambda^\theta).$$

设  $\Omega_n$  表示  $\mathbb{T}$  中的点  $\lambda$ :  $K_\theta$  里每一个函数及它的直到  $n$  阶导数在点  $\lambda$  没有非切向极限. 对  $\lambda \in \Omega_n$ , 设  $D^n[\tilde{k}_\lambda^\theta \otimes k_\lambda^\theta]$  表示  $\tilde{k}_\lambda^\theta \otimes k_\lambda^\theta$  关于  $\lambda$  的  $n$ -阶奇异导数,  $\overline{D}^n[k_\lambda^\theta \otimes \tilde{k}_\lambda^\theta]$  表示  $k_\lambda^\theta \otimes \tilde{k}_\lambda^\theta$  关于  $\bar{\lambda}$  的  $n$ -阶奇异导数. 对  $\lambda \in \mathbb{D} \cap \Omega_n$ , 令

$$A_{\frac{n! \bar{\theta}(z)}{(\bar{z}-\lambda)^{n+1}}} = \overline{D}^n[k_\lambda^\theta \otimes \tilde{k}_\lambda^\theta], \quad (1)$$

及

$$A_{\frac{n! \theta(z)}{(z-\lambda)^{n+1}}} = D^n[\tilde{k}_\lambda^\theta \otimes k_\lambda^\theta]. \quad (2)$$

该文主要是借助于 Hardy 空间上 Hankel 算子的积, 给出了在模型空间 (Model space) 上有限秩截断 Toeplitz 算子的 Bessonov 的定理 [3] 的一个新证明.

主要结果是: 空间  $K_\theta$  上每一个有限秩截断 Toeplitz 算子都是形如截断 Toeplitz 算子 (1) 或 (2) 的有限的线性组合.

利用该文的思想, 模型空间上具有有界符号的截断 Toeplitz 算子的紧性就有了刻画 [4].

## REFERENCES

- [1] A. Baranov, I. Chalendar, E. Fricain, J. Mashreghi and D. Timotin, Bounded symbols and reproducing kernel thesis for truncated Toeplitz operators, J. Funct. Anal. 259 (2010), no. 10, 2673-2701.
- [2] A. Reijonen, Derivatives of Inner Functions in Weighted Mixed Norm Spaces, The Journal of Geometric Analysis 29 (2019), no. 3, 1859-1875.
- [3] R. V. Bessonov, Truncated Toeplitz operators of finite rank, Proc. Amer. Math. Soc. 142 (2014), no. 4, 1301-1313.
- [4] P. Ma and D. Zheng, Compact truncated Toeplitz operators, J. Funct. Anal. 270 (2016), no. 11, 4256-4279.