数学研究及评论

Mathematical Research with Reviews

Issue 2 (2019) Art.11

Bekjan, Turdebek N. (吐尔德别克)

Noncommutative Symmetric Hardy Spaces

Integr. Equ. Oper. Theory 81(2015), 191-212.

评论员：韩亚洲 (新疆大学，乌鲁木齐)

收稿日期：2019年10月20日

非交换 Hardy 空间理论是非交换分析理论的有机组成部分, 是当前泛函分析领域中一个活跃的前沿研究方向. Arveson [1] 在 20 世纪 60 年代引入了次对角代数的概念, 此概念统一了我们在算子代数中经常用到的若干非自伴代数, 如上三角矩阵产生的代数和算子值解析函数构成的代数. 同时, Arveson 在 [1] 中还引入了非交换 Hardy 空间理论. 此后非交换 Hardy 空间理论经过 Arveson, 吐尔德别克, Blecher, Exel, 吉国兴, Marsalli, Labuschagne, Saito, West 和许全华等人的研究取得了丰硕的成果. 经典 Hardy 空间上的许多重要结论也被推广到了非交换的情形. 另外, 我们知道在经典的空间理论中广义 Hardy 空间中也有许多重要的结论, 它们也有着广泛的应用. 但是人们对非交换广义 Hardy 空间的研究则非常少, 非交换对称 Hardy 空间正是一类非交换的广义 Hardy 空间.

令 $I=[0,1]$ 且 m 是 I 上的 Lebesgue 测度. 记 $L_0(I)$ 为所有定义在 I 上的可测函数组成的集合. 对于每一个函数 $f\in L_0(I)$ 我们可以定义其非增重排为

$$f^*(t)=\inf\{s>0: d_f(s)\leq t\},\ t>0,$$

其中

$$d_f(s)=m(\{t\in I: |f(t)|>s\}),\ s>0$$

是 f 的分布函数. 我们称 Banach空间 $E\subseteq L_0(I)$ 为对称函数空间, 如果对于任意 $f\in E$, $g\in L_0(I)$ 和 $f^*(t)\geq g^*(t)$ 则有 $\|f\|_E\geq\|g\|_E$ 成立.

设 $(\mathcal{M},\tau)$ 是一个非交换概率空间且 E 是 I 上的一个对称拟Banach空间. 令 $L_0(\mathcal{M})$ 为所有 τ-可测算子组成的空间. 对任意的 $x\in L_0(\mathcal{M})$, 我们定义其广义奇异值函数μ为

$$\mu_t(x)=\inf\{s>0:\tau(e_s^{\perp}(|x|))\leq t\},\, t>0.$$

由此, 我们可以定义

$$L_E(\mathcal{M})=\{x\in L_0(\mathcal{M}):\mu_t(x)\in E\};\, \|x\|_{L_E(\mathcal{M})}=\|\mu_t(x)\|_E, x\in L_E(\mathcal{M}).$$

2014 年 Sukochev [6] 证明了此类非交换算子空间还是拟Banach空间.

令 $\mathcal{D}$ 为 $\mathcal{M}$ 的一个 von Neumann 子代数且 $\Phi:\mathcal{M}\to\mathcal{D}$ 为相应的唯一满足 $\tau\circ\Phi=\tau$ 的忠实的条件期望. 设 $\mathcal{A}$ 是 $\mathcal{M}$ 关于 $\mathcal{D}$ 的次对角代数且 E 是一个包含 $L_\infty(I)$ 的对称拟 Banach 空间. 我们定义非交换对称 Hardy 空间 $H_E(\mathcal{A})$ 为 $H_E(\mathcal{A})=[\mathcal{A}]_E$, 其中 $[\mathcal{A}]_E$ 表示 $\mathcal{A}$ 在 $E(\mathcal{M})$ 中的闭包.

在本文中作者把非交换H^p空间理论中的结论很完善的推广到了非交换对称 Hardy 空间中. 首先作者在α-凸的条件下定义了非交换对称空间的乘积空间并给出了如下结论：若 $E=E_1(\mathcal{M})\odot E_2(\mathcal{M})$, 则有 $L_E(\mathcal{M})=L_{E_1}(\mathcal{M})\odot L_{E_2}(\mathcal{M})$. 此结论是 [4] 中相应结论的推广, 它在后面的讨论中起到了至关重要的作用. 在此基础之上, 作者应用空间的连续嵌入关系(可以由插值空间理论得到)及非交换 H^p 空间的结论, 在一些基本条件(如E的可分性, 凸性等)之下得到了非交换对称 Hardy 空间上的 Szegö 分解, Riesz 分解, 外算子的性质和 $L_E(\mathcal{M})$中$\mathcal{A}$-不变子空间的刻画等结论. 这篇文章中关于乘积空间的应用是值得大家关注的一个亮点. 最近吐尔德别克还应用此类乘积空间研究了非交换对称 Hardy 空间的复插值空间 [2, 3]. 另外, 在2019年 Liu-Sager 把这篇文章中关于不变子空间的结论推广到了半有限的情形, 更多的结论参见文献 [5]. 最后我们指出与半有限 von Neumann 代数相关的非交换 Hardy 空间中的 Riesz 分解定理及此类空间之间等距同构的刻画是两个值得大家关注的有待解决的问题.

References

[1] W. B. Arveson, Analyticity in operator algebras, Amer. J. Math. 89 (1967), 578-642.

[2] T. N. Bekjan, M. Mustafa, On interpolation of noncommutative symmetric Hardy spaces, Positivity 21 (2017), 1307–1317.

[3] T. N. Bekjan, M. Raikhan, Interpolation of Haagerup noncommutative Hardy spaces, Banach J. Math. Anal. 13 (2019), 798-814.

[4] P. Kolwicz, K. Lenik, L. Maligranda, Pointwise products of some Banach function spaces and factorization, J. Funct. Anal. 266 (2014), 616–659.

[5] W. Liu, L. Sager, A Beurling theorem for noncommutative Hardy spaces associated with semifinite von Neumann algebras with unitarily invariant norms, J. Operator Theory 82 (2019), 49–78.
[6] F. Sukochev, Completeness of quasi-normed symmetric operator spaces, Indag. Math. 25 (2014), 376–388.