数学研究及评论

Mathematical Research with Reviews

Issue 2 (2019) Art.10

Chen, Xiao-Wu (陈小伍)

Equivariantization and Serre duality I

Appl. Categ. Structures 25 (2017), no. 4, 539–568.

评论员：周振强 (厦门理工学院，厦门)

收稿日期：2019年10月17日

给定一个代数系统，人们常常用一个群作用在该代数系统上，构造出一个新的代数系统, 并考虑两者之间的关系. 比如，给定一个有限群 G, 一个Artin代数 A, 以及该群 G 对 A 的作用，可以构造一个新的Artin代数，称之为斜群代数(skew group algebra), 记为 AG. 更一般地，可以考虑交叉积代数(crossed product algebra). H. Lenzing在其未发表的文章“Polyhedral groups and the geometric study of tame hereditary Artin algebras”中指出，斜群代数或交叉积代数的构造, 至少可以追溯到1932年Noether的研究 [4].

I. Reiten和C. Riedtmann于1985年在文 [3]中, 系统地研究了Artin代数及其斜群代数的同调性质和表示论性质. 文 [3]中提及由有限群 G 对Artin代数 A 的作用, 可以诱导出群 G 对有限生成模范畴 mod$A$ 的作用. 用群 G 对有限生成模作用的所有轨道作为对象, 可构造出一个新的范畴, 称之为轨道范畴(orbit category), 记为 $(\text{mod}A)[G]$. 将其做幂等完备化(idempotent completion), 得到的范畴称为斜群范畴(skew group category), 记为 $(\text{mod}A)(G)$. 在有限群 G 的阶数 n 可逆(如果对任意 $a \in A$, 总存在唯一的 $b \in A$, 使得 $a = n\,b$, 则称阶数 n 在 A 中可逆)的前提下，则斜群范畴 $(\text{mod}A)(G)$ 范畴等价于斜群代数 AG 的有限生成模范畴 $\text{mod}(AG)$.

将上述过程在一般的加法范畴层面构建, 可以考察有限群对一个加法范畴 $\mathscr{C}$ 的严格作用(strict action)和一般作用(action, 一般作用的定义比严格作用更为宽泛, 具体见本文的2.1节), 进而构造出两个新的加法范畴: 轨道范畴和等变化范畴(equivariantization, 或称协变化范畴). 粗略地说, 轨道范畴是由群在 $\mathscr{C}$ 中作用的轨道构成的新范畴, 而等变化范畴是由类似于"不动对象"构成的新范畴. 这里的不动对象确切的定义为 G-等变对象(equivariant object).

1997 年, Deligne 在文 [1] 中研究了群对范畴的一般作用. Drinfeld, Gelaki, Nikshych 和 Ostrik 在文 [2] 中讨论了范畴关于有限群 G 的一般作用的等变化.

设 k 是一个域, $\mathscr{A}$ 是一个Hom-有限的 k-线性加法范畴. 设 $S:\mathscr{A}\longrightarrow\mathscr{A}$ 是 k-线性自等价. 记 $\mathrm{Hom}_k(-,k)$ 为对偶函子. 若 $\mathscr{A}$ 满足下述双变元同构关系

$$\varphi_{X,Y}: D\mathrm{Hom}_{\mathscr{A}}(X,Y)\longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathscr{A}}(Y,S(X)),$$

则称范畴 $\mathscr{A}$ 具有Serre对偶. 进一步地, 若考虑一个有限群 G 作用在 $\mathscr{A}$ 上, 我们要问：其等变化范畴 $\mathscr{A}^G$ 是否同样具有Serre对偶? 其自然同构 φ 又是如何? 作者给出了该问题的一种回答. 首先, 范畴 $\mathscr{A}$ 的Serre对偶函子可以自然诱导其轨道范畴和等变化范畴上的Serre对偶函子. 进一步地, 作者利用自然同构 φ, 非退化的双线性对(bilinear pairing)以及迹函数(trace function)的等价关系, 刻画了等变化范畴 $\mathscr{A}^G$ 的迹函数, 从而给出了等变化范畴 $\mathscr{A}^G$ 的自然同构 φ^{-1} 的具体对应. 此外, 作者在文中还讨论了具有周期Serre对偶函子情形的等变化范畴以及分次Calabi-Yau三角范畴的等变化范畴.

References

[1] P. Deligne, Action du groupe des tresses sur une catégorie, Invent. Math., 128(1997), 159-175.

[2] V. Drinfeld, S. Gelaki, D. Nikshych, V. Ostrik, On braided fusion categories I, Sel. Math. New Ser., 16(2010), 1-119.

[3] I. Reiten, C. Riedtmann, Skew group algebras in the representation theory of artin algebras, J. Algebra, 92(1985), 224-282.

[4] E. Noether, Hyperkomplexe Systeme in ihren Beziehungen zur kommutativen Algebra und zur Zahlentheorie, Verhandl. Intern. Math-em-atiker-Kon-gresses Zürich, 1(1932), 189-194.