数学研究及评论

Mathematical Research with Reviews

Issue 1 (2019) Art.9

Liu, Jianya (刘建亚); Wu, Jie (吴杰); Zhao, Yongqiang (赵永强)

Manin's conjecture for a class of singular cubic hypersurfaces

Int. Math. Res. Not. IMRN 2019, no. 7, 2008–2043.

评论员：胡勇 (南方科技大学，深圳)

收稿日期：2019年9月12日

Manin 猜想是 Manin 及其合作者于上世纪 80 年代末 90 年代初 (参见 [1]) 提出的关于射影簇上的有理点分布如何由几何性态决定的一个重要猜想. 最初的版本是对光滑的 Fano 簇陈述的, 后来在 [2] 文中被推广到一大类奇异的 Fano 簇情况.

本文主要研究由方程

$$x^3 = (y_1^2 + \cdots + y_n^2)z$$

定义的奇异三次超曲面 S_n 上有理点的分布问题, 其中的正整数 $n \geq 3$. 在有理点集 $S_n(\mathbb{Q})$ 上一个自然的高度函数 H 可以按如下方式明显给出: 对于任意 $P \in \mathbb{P}^{n+1}(\mathbb{Q})$, $H(P)$ 的定义方法是先为 P 选取整体互素的整系数齐次坐标 $(x : y_1 : \cdots : y_n : z)$, 然后令

$$H(P) := \max\left\{|x|\,, \sqrt{y_1^2 + \cdots + y_n^2}\,, |z|\right\}^{n-1}.$$

对给定的正数 B, 记

$$N_n(B) := \#\{P \in U(\mathbb{Q}) \,|\, H(P) \leq B\},$$

这里 U 是 S_n 中满足 $xz \neq 0$ 的点构成的开集 (在这个开集上使用圆法的基本思想来计数有理点才是可行的). 实际操作中为了研究 $N_n(B)$ 的渐近估计, 需要使

用直接对整数组 $(x, y_1, \ldots, y_n, z) \in \mathbb{Z}^{n+2}$ 来定义的函数

$$H^*(x, y_1, \ldots, y_n, z) := \max\left\{|x|, \sqrt{y_1^2 + \cdots + y_n^2}, |z|\right\}.$$

再以 $N_n^*(B)$ 来记满足 $H^*(x, y_1, \ldots, y_n, z) \leq B$ 和 $xz \neq 0$ 的 $(n+2)$-元整数组数量.

本文作者通过研究 $N_n^*(B)$ 在 B 趋于无穷大时的渐近估计来得到有关 $N_n(B)$ 的估计. 文章得到的主要结果如下:

定理 1. *设正整数 n 是 4 的倍数. 则当 $B \to \infty$ 时,*

$$N_n(B) = \mathcal{C}_n B^{n-1} (\log B)^2 \left(1 + O((\log B)^{-1})\right)$$
$$N_n^*(B) = \mathcal{C}_n^* B^{n-1} (\log B)^2 \left(1 + O((\log B)^{-1})\right)$$

其中 $\mathcal{C}_n$ 和 $\mathcal{C}_n^*$ 均为仅依赖于 n 的正常数.

(以上常数 $\mathcal{C}_n$ 和 $\mathcal{C}_n^*$ 可以写出具体的表达式, 详情可见于文中定理 7.1 和公式 (7.7).)

作者在文中先对 $n = 4$ 的情况给出了完整的证明细节, 然后对于一般的情况文中解释了如何用同样的方法适当做微调来处理. 作者还指出, 本文的方法对任意的 $n \geq 3$ 都可以奏效.

通过以上定理 1 作者证明了 n 为 4 的倍数时 S_n 满足 Manin 猜想.

References

[1] Batyrev, V. V. and Manin, Yu. I., *Sur le nombre des points rationnels de hauteur borné des variétés algébriques.* Math. Ann. 286 (1990), no. 1-3, 27–43.

[2] Batyrev, Victor V. and Tschinkel, Yuri, *Tamagawa numbers of polarized algebraic varieties.* Astérisque No. 251 (1998), 299–340.