数学研究及评论

Mathematical Research with Reviews

Issue 1 (2019) Art.7

Bekjan, Turdebek N. (吐尔德别克)

Interpolation of noncommutative symmetric martingale spaces

J. Operator Theory 77 (2017), no. 2, 245–259.

评论员：黄景灏 (University of New South Wales, Sydney, Australia)

收稿日期：2019年8月29日

插值空间是泛函分析中非常基本的研究课题。本文考虑了非交换对称鞅空间的插值问题。

记$I = [0, \infty)$, m为Lebesgue测度。定义$L(I)$为在I上的所有几乎处处有限的函数。我们定义$L(I)$的一个子空间$L_0(I)$:

$$L_0(I) = \{f \in L(I) : \exists s > 0 \text{ s.t. } d_f(s) < \infty\},$$

其中$d_f(s) = m(\{t \in I : |f(t)| > s\})$是$f \in L(I)$的分布函数。对于每一个函数$f \in L(I)$, 我们定义其重排函数为

$$\mu_t(f) = \inf\{s > 0 : d_f(s) \le t\},\ t \in I.$$

如果一个Banach空间$E \subset L_0(I)$满足如下条件:

$$\text{如果} f \in E,\ g \in L_0(I) \text{ 和 } \mu(g) \le \mu(f), \text{便有} \|g\|_E \le \|f\|_E,$$

那么我们称之为对称函数空间.

设$\mathcal{M}$为一个半有限的von Neumann代数， τ是$\mathcal{M}$上的一个正规、半有限和忠实(faithful)的迹。令$L_0(\mathcal{M})$为所有τ可测算子组成的空间。对于任意一个算子$X \in L_0(\mathcal{M})$, 我们定义其奇异值函数

$$\mu_t(X) = \inf\{s > 0 : \tau(E^{|X|}(s, \infty)) \le t\},\ t > 0.$$

设E为一个对称函数空间，我们可以定义非交换对称算子空间

$$L_E(\mathcal{M}) = \{X \in L_0(\mathcal{M}) : \mu(X) \in E)\}.$$

2008年，Kalton和Sukochev[3]证明了: 如果E是一个Banach空间，那么$L_E(\mathcal{M})$也是一个Banach空间。对于很多E拥有的性质，$L_E(\mathcal{M})$也同样拥有这些性质[2]. 这说明，在某些情况下，只需要研究函数空间E, 就可以得到我们需要的某些非交换空间L_E的性质。

自从Pisier和Xu[5]建立了非交换鞅理论之后，该理论得到了快速的发展。

令$x = (x_n)_{n\geq 1}$为一个非交换鞅。定义其差分序列$dx = (dx_n)_{n\geq 1}$ 满足 $dx_1 = x_1$, $dx_n = x_n - x_{n-1}$, $n \geq 2$. 对于$L_E(\mathcal{M})$ 中的一个有限鞅x, 我们定义

$$S^c(x) = (\textstyle\sum_{k\geq 1} |dx_k|^2)^{1/2} \text{ 和 } S^r(x) = (\textstyle\sum_{k\geq 1} |dx_k^*|^2)^{1/2}$$

以及 $\|x\|_{H_E^c(\mathcal{M})} = \|S^c(x)\|_{L_E(\mathcal{M})}$ 和 $\|x\|_{H_E^r(\mathcal{M})} = \|S^r(x)\|_{L_E(\mathcal{M})}$.

定义$H_E^c(\mathcal{M})$为$S^c(x)$的完备化空间(对应地，我们可以定义$H_E^r(\mathcal{M})$). 它们都是Banach空间。如果Boyd指标满足$1 \leq p_E \leq q_E < 2$, 我们定义非交换Hardy鞅空间为

$$H_E(\mathcal{M}) = H_E^c(\mathcal{M}) + H_E^r(\mathcal{M}).$$

如果$2 \leq p_E \leq q_E < \infty$, 那么我们定义

$$H_E(\mathcal{M}) = H_E^c(\mathcal{M}) \cap H_E^r(\mathcal{M}).$$

本文的主要结果为，如果对称函数空间E是E_1和E_2的复插值空间(即$E = (E_1, E_2)_\theta$)并且E_1和E_2满足一些通常的性质(如Fatou性质、order continuous norm), 那么对应的非交换Hardy空间$H_E(\mathcal{M})$也为E_1和E_2对应的非交换Hardy空间的复插值空间。本文的结果将[1]和[4]中关于非交换L_p-空间的部分结果推广到非交换对称空间。

References

[1] T.N. Bekjan, Z. Chen, M. Perrin, Z. Yin, Atomic decomposition and interpolationfor Hardy spaces of noncommutative martingales, J. Funct. Anal. 258 (2010), 2483—2505.

[2] P.G. Dodds, B. de Pagter, Normed Kothe spaces: A non-commutative viewpoint, Indag. Math. 25 (2014), 206—249.

[3] N.J. Kalton, F.A. Sukochev, Symmetric norms and spaces of operators. J. Reine Angew. Math. 621 (2008), 81—121.

[4] M. Musat, Interpolation between noncommutative BMO and noncommutative L_p-spaces, J. Funct. Anal. 202 (2003), 195—225.

[5] G. Pisier, Q. Xu, Non-commutative martingale inequalities, Comm. Math. Phys. 189 (1997), 667—698.