

## 数学研究及评论

Mathematical Research with Reviews

Issue 1 (2019) Art.4

© Prior Science Publishing

Xiaodan Chen (陈小丹), Kinkar Ch. Das

*Solution to a conjecture on the maximum ABC index of graphs with given chromatic number*

Discrete Appl. Math. 251 (2018), 126–134.

评论员：马修 (Waterloo, ON, Canada. Email: MathieuComment@hotmail.com)

收稿日期：2019年8月18日

给定一个有限无向简单图  $G = (V, E)$ , 原子键连通度是指以下这个量

$$ABC(G) := \sum_{uv \in E(G)} \sqrt{\frac{d_u + d_v - 2}{d_u d_v}},$$

其中  $d_i, i \in V$ , 是顶点  $i$  的度。原子键连通度是图的一种拓扑指数, 因其在化学领域应用的推动, 近年来引发了不少图论学者对其研究。

记  $\chi(G)$  为图  $G$  的色数 (即对图上的每个顶点染色, 使得相邻的两个点颜色不同, 最小需要的颜色数)。色数确定顶点集  $V$  的一种划分。如果  $\chi(G) = 2$ , 则称  $G$  为二分图; 如果  $\chi(G) \geq 3$ , 则称  $G$  为多分图 (或确切地说是  $\chi(G)$ -分图)。一个完全  $r$ -分图是一个  $r$ -分图, 其中两点 (按颜色划分后) 若属于相异的部分则必相邻。图兰图 (Turán graph) 是一种特殊的完全  $r$ -分图, 其中各部分的顶点数的差不超过 1, 记作  $T_{n,r}$ , 其中  $n$  为图的顶点数 (或阶)。图兰图常出现在极图理论 (extremal graph theory) 中。张修梅等人在文 [4] 中做了以下猜测

**猜想:** 如果  $G$  为任意色数  $\chi \geq 3$  的  $n$  阶连通图, 则

$$ABC(G) \leq ABC(T_{n,r}),$$

等号成立当且仅当  $G$  与  $T_{n,r}$  同构。

本文的主要贡献是证明了这个猜想。作者同时得到  $ABC(T_{n,r})$  的解析式。

张修梅等人在文[4]证明了二分图(即 $\chi = 2$ )的情形。这个情形的结果其实早前已被Das[2]等人得到。Dimitrov等人在[3]证明了当 $\chi$ 整除 $n$ 的情形。

以下简要介绍本文证明的思路。记 $K_{n_1, n_2, \dots, n_r}$ 为 $n$ 阶完全 $r$ -分图, 它各部分的顶点数为 $n_i, i = 1, 2, \dots, r, \sum_{i=1}^r n_i = n$ . 不妨令 $n_1 \geq n_2 \geq \dots \geq n_r \geq 1$ . 首先[1, 2]边数少的原子键连通度小, 确切地说是一个图去掉一边则原子键连通度变小, 这从定义很容易看出。于是如果 $G$ 是 $K_{n_1, n_2, \dots, n_r}$ 的某个生成子图, 则

$$ABC(G) \leq ABC(K_{n_1, n_2, \dots, n_r}),$$

等号成立当且 $G$ 与 $K_{n_1, n_2, \dots, n_r}$ 同构。

本文证明的关键引理是 $n$ 阶完全 $r$ -分图之间的原子键连通度存在一个偏序关系(文中引理8): 如果 $n_1 - n_r \geq 2$ , 则

$$ABC(K_{n_1-1, n_2, \dots, n_r+1}) > ABC(K_{n_1, n_2, \dots, n_r}).$$

这说明 $n$ 阶完全 $r$ -分图, 各部分顶点数差(用 $n_1 - n_r$ 来衡量)越小的原子键连通度越大。于是就证明了

$$ABC(K_{n_1, n_2, \dots, n_r}) \leq ABC(T_{n,r}),$$

等号成立当且 $K_{n_1, n_2, \dots, n_r}$ 与 $T_{n,r}$ 同构。这个关键引理的证明包含较繁杂的计算。

## REFERENCES

- [1] J. Chen, X. Guo, Extreme atom-bond connectivity index of graphs, MATCH Commun. Math. Comput. Chem. 65 (2011) 713–722.
- [2] K.C. Das, I. Gutman, B. Furtula, On atom-bond connectivity index, Chem. Phys. Lett. 511 (2011) 452–454.
- [3] D. Dimitrov, B. Ikić, R. Škrekovski, Remarks on maximum atom-bond connectivity index with given graph parameters, Discrete Appl. Math. 222 (2017) 222–226.
- [4] X.-M. Zhang, Y. Yang, H. Wang, X.-D. Zhang, Maximum atom-bond connectivity index with given graph parameters, Discrete Appl. Math. 215 (2016) 208–217.