数学研究及评论

Mathematical Research with Reviews

Issue 1 (2019) Art.3

Su, Xun-Tuan (苏循团)

Proof of a monotonicity conjecture

Math. Inequal. Appl. 21 (2018), no. 1, 91–98.

评论员：马修 (Waterloo, ON, Canada. Email: MathieuComment@hotmail.com)

收稿日期：2019年8月13日

Haber不等式是指对非负实数x, y以及正整数n成立

$$\left(\frac{x+y}{2}\right)^n \le \frac{x^n + x^{n-1}y + \cdots + y^n}{n+1}.$$

知名分析学家Grahame Bennett(1945-2016)发现Haber不等式可由关于完全对称函数的舒尔定理(Schur's Theorem)直接得到[1]. Bennett在文[1]得到比舒尔定理更一般的结论，由它可以得到

$$\left(\frac{ax+by}{a+b}\right)^n \le \frac{1}{\binom{n+a+b-1}{n}} \sum_{k=0}^{n} \binom{k+a-1}{k} x^k \binom{n-k+b-1}{n-k} y^{n-k},$$

其中a, b为任意正数，x, y为任意非负数。令上式中$a = b = 1$便是Haber不等式。想必Bennett是想用他得到的更一般的舒尔定理来洞察Haber不等式（下面猜测的形成用到了不等式理论的经典技术）：考察$a = b$情形，固定x, y, n, 令

$$F(a) := \frac{1}{\binom{n+2a-1}{n}} \sum_{k=0}^{n} \binom{k+a-1}{k} x^k \binom{n-k+a-1}{n-k} y^{n-k}.$$

因为$\lim_{a\to\infty} F(a) = \left(\frac{x+y}{2}\right)^n$, $\lim_{a\to 0^+} F(a) = \frac{x^n+y^n}{2}$, 并且可以证明

$$\frac{x^n + y^n}{2} \ge \frac{x^n + x^{n-1}y + \cdots + y^n}{n+1},$$

即 $\lim_{a\to 0^+} F(a) \geq F(1)$. **Bennett猜测$F(a)$是单调递减的**。苏循团（作者）在这篇文章中证明了Bennett的猜测是正确的。

单从函数$F(a)$的表达式来看，确定它的单调性不是件容易的事。从本文的证明可以看出作者具有很强的洞察能力以及处理复杂计算的能力。下面简要介绍本文证明的亮点。

抛开简单情形，仅考虑$n \geq 2$, $x, y > 0$, $x \neq y$情形。记$t = x/y$. 令$a_2 > a_1$, 需证 $F(a_1) - F(a_2) > 0$. 而

$$F(a_1) - F(a_2) = \frac{y^n}{\binom{n+2a_1-1}{n}\binom{n+2a_2-1}{n}} G(t),$$

其中$G(t)$是t的n次多项式。$G(t)$的系数并不都是正的！但是作者发现 $(t-1)^2 | G(t)$. 作者创造性的引理如下（文中引理1）：

假设$f(t) = \sum_{i=0}^{n} a_i t^i$是$n$次对称多项式(即$a_k = a_{n-k}$, $k = 0, \ldots, n$)且$f(t) = (t-1)^2 h(t)$. 那么$h(t)$也是对称多项式。如果对于$k = 0, 1, \ldots, \lfloor \frac{n-2}{2} \rfloor$有$\sum_{i=0}^{k} a_i > 0$, 则$h(t)$是严格单峰(unimodal)多项式且所有系数为正。

显然$G(t)$是对称多项式。根据这个引理，要完成Bennett猜测的证明需要证明$G(t)$的前$\lfloor \frac{n-2}{2} \rfloor$个部分系数和(作者记为$B_k$)为正。作者证明了 $\{B_k\}_{\lfloor 0 \leq k \leq \frac{n-2}{2} \rfloor}$是个单峰序列且首末项为正。

除了有正确的思路，这样复杂的运算与论证能够完成归功于作者的耐心与计算能力。

Bennett的这个猜测同样引起了若干德国学者的关注，感兴趣的读者可参考[2].

References

[1] Bennett, G.: Hausdorff means and moment sequences, Positivity 15 (2011), 17–48.

[2] Abel, U.; Kushnirevych, V.: On Bennett's conjecture and complete monotonicity, Math. Inequal. Appl. 22 (2019), no. 1, 165–173.