数学研究及评论

Mathematical Research with Reviews

Issue 1 (2019) Art.2

Chen, Zhi (陈智); Cao, Lei (曹雷)

On the maximum of the permanent of $(I - A)$

Linear Algebra Appl. 555 (2018), 412–431.

评论员：陆达明 (湖北　武汉)

收稿日期：2019年8月13日

积和式(permanent)的估计是矩阵论与算法复杂性研究的一个经典课题。给定一个数域上的n阶矩阵$A = [a_{ij}]$, 它的积和式定义为

$$\mathrm{per}(A) = \sum_{\pi \in S_n} \prod_{i=1}^{n} a_{i,\pi(i)},$$

其中S_n为n阶置换群。它的表达式与行列式的定义相似，但是性质上有很大不同。比如积和式的计算是#P完全的，但是行列式可以用高斯消元法等算法在多项式时间内解决。关于积和式的估计有一个著名问题叫做范德瓦尔登(Van der Waerden)猜想，现已解决。它是说对于任意双随机矩阵，其积和式大于等于$n!/n^n$.

本文研究与次双随机矩阵(doubly substochastic)有关的积和式的估计。一个元素非负的矩阵称为双随机矩阵(doubly stochastic)，如果它的每个行和列求和均为1. 一个元素非负的矩阵称为次双随机矩阵，如果它的每个行和列求和均不大于1; 类似地，它称为次行随机矩阵，如果它的每个行求和不大于 1. 本文的研究背景始于上个世纪六十年代， Marcus和Minc[5]提出并被 Brualdi和Newman [1], Gibson[2, 3]等人证明和改善至以下不等式

$$\mathrm{per}(I - A) \geq \det(I - A) \geq 0,$$

其中A为次行随机矩阵。在相同条件下，上个世纪八十年代， Malek[4]得到了$I-A$的积和式的一个上界

$$\operatorname{per}(I-A) \leq 2^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}.$$

记矩阵的元素和为$\sigma(A)$, 即$\sigma(A)=\sum_{i,j=1} a_{ij}$. 本文证明了以下估计

定理 1: 假设A为n阶次行随机矩阵，如果n为偶数或者$0 \leq \sigma(A) \leq n-1$, 则

$$\operatorname{per}(I-A) \leq 2^{e/2}\left(1+\left(\frac{s-e}{2}\right)^2\right),$$

其中e为不超过s的最大偶数，并且存在次双随机矩阵使得等号成立。

该定理的证明用到Ryser的积和式表达式，基本的图论工具。

对于n为奇数且$n-1<\sigma(A) \leq n$的情形，本文证明了以下估计

定理 2: 假设A为n阶次行随机矩阵，如果n为奇数且$n-1<\sigma(A) \leq n$, 则

$$\operatorname{per}(I-A) \leq 2^{\frac{n-1}{2}}.$$

并且存在次行随机矩阵使得等号成立。

但是如果定理2的条件加强为“假设A为n阶次双随机矩阵”，则上述不等式的等号往往不成立。作者提出了几个猜测。评论员认为最有意思的是下面这个猜想(文中Conjecture 4.3)

猜想: 假设A为n阶双随机矩阵，如果n为奇数且$n>3$，则

$$\operatorname{per}(I-A) \leq 3 \cdot 2^{\frac{n-5}{2}}.$$

如果这个猜测成立， $3 \cdot 2^{\frac{n-5}{2}}$也是最优上界。

References

[1] Richard A. Brualdi, Morris Newman, Proof of a permanental inequality, Q. J. Math. 17 (2) (1966) 234–238.

[2] P.M. Gibson, A short proof of an inequality for the permanent function, Proc. Amer. Math. Soc. 17 (2) (1966) 535–536.

[3] P.M. Gibson, An inequality between the permanent and determinant, Proc. Amer. Math. Soc. 19 (4) (1968) 971–972.

[4] Massoud Malek, On the maximum of per$(I-A)$, Linear Multilinear Algebra 19 (4) (1986) 347–355.

[5] M. Marcus, H. Minc, Permanents, Amer. Math. Monthly 72 (1965) 577–591.