**数学研究及评论**

Mathematical Research with Reviews

Issue 1 (2019) Art.17



Zhang, Chi (张驰); Huang, Hua-Lin (黄华林)

*A Generalization of the Doubling Construction for Sums of Squares Identities*

SIGMA Symmetry Integrability Geom. Methods Appl. 13 (2017), Paper No. 064, 6 pp.

评论员：户亚青 (Indiana University, Bloomington, IN, USA)

收稿日期：2019年9月29日

二次型复合的 Hurwitz 问题 [Hur98] 寻求的是对所谓的容许三元组 $[r, s, N]$ 的一个全面的刻画，其中 $r, s, N$ 均为正整数，且容许的涵义是指存在形如：

$$(a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_r^2)(b_1^2 + b_2^2 + \cdots + b_s^2) = c_1^2 + c_2^2 + \cdots + c_N^2$$

的平方和公式 (Sums of Squares Identities), 其中 $a = (a_1, a_2, \cdots, a_r)$ 和 $b = (b_1, b_2, \cdots, b_s)$ 都是由未知变量构成的向量，且每一个 $c_k$ 都是关于 $a$ 和 $b$ 的系数取自某个域$\mathbb{K}$中的双线性型。这个问题已经存在一个多世纪，然而其研究进展可以说还处于比较初级的阶段，参见文献 [Raj93, Sha00].

下面是几个平方和公式的经典例子：

$$\left(\sum_{i=1}^{1} a_i^2\right)\left(\sum_{j=1}^{1} b_j^2\right) = (\pm a_1 b_1)^2,$$

$$\left(\sum_{i=1}^{2} a_i^2\right)\left(\sum_{j=1}^{2} b_j^2\right) = (a_1 b_1 \mp a_2 b_2)^2 + (a_1 b_2 \pm a_2 b_1)^2,$$

$$\left(\sum_{i=1}^{4} a_i^2\right)\left(\sum_{j=1}^{4} b_j^2\right) = (a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3 + a_4b_4)^2 + (a_1b_2 - a_2b_1 + a_3b_4 - a_4b_3)^2$$
$$+ (a_1b_3 - a_2b_4 - a_3b_1 + a_4b_2)^2 + (a_1b_4 + a_2b_3 - a_3b_2 - a_4b_1)^2,$$
$$\left(\sum_{i=1}^{8} a_i^2\right)\left(\sum_{j=1}^{8} b_j^2\right) = (a_1b_1 - a_2b_2 - a_3b_3 - a_4b_4 - a_5b_5 - a_6b_6 - a_7b_7 - a_8b_8)^2$$
$$+ (a_1b_2 + a_2b_1 + a_3b_4 - a_4b_3 + a_5b_6 - a_6b_5 - a_7b_8 + a_8b_7)^2$$
$$+ (a_1b_3 - a_2b_4 + a_3b_1 + a_4b_2 + a_5b_7 + a_6b_8 - a_7b_5 - a_8b_6)^2$$
$$+ (a_1b_4 + a_2b_3 - a_3b_2 + a_4b_1 + a_5b_8 - a_6b_7 + a_7b_6 - a_8b_5)^2$$
$$+ (a_1b_5 - a_2b_6 - a_3b_7 - a_4b_8 + a_5b_1 + a_6b_2 + a_7b_3 + a_8b_4)^2$$
$$+ (a_1b_6 + a_2b_5 - a_3b_8 + a_4b_7 - a_5b_2 + a_6b_1 - a_7b_4 + a_8b_3)^2$$
$$+ (a_1b_7 + a_2b_8 + a_3b_5 - a_4b_6 - a_5b_3 + a_6b_4 + a_7b_1 - a_8b_2)^2$$
$$+ (a_1b_8 - a_2b_7 + a_3b_6 + a_4b_5 - a_5b_4 - a_6b_3 + a_7b_2 + a_8b_1)^2.$$

这些公式可以很自然地被解释为实数，复数，四元数代数和八元数代数上平方范数的“模律”。

看过这些公式后，一般读者们（以及许多数学家）可能会想要找到其它形如 $[N, N, N]$ 的平方和公式。早在1898年, 此类容许三元组已经被 Hurwitz 在文献 [Hur98] 中完全确定了，结论就是著名的*“1，2，4，8 定理”*，排除了 $N$ 是其它自然数的可能性。在该文献的结尾，他提出的一般性的问题就是上述的 Hurwitz 问题。

Hurwitz [Hur23] 在 1918 年和 Radon [Rad22] 在 1922 年各自独立地完全确定复数域 $\mathbb{C}$和实数域 $\mathbb{R}$ 上形如 $[r, N, N]$ 的所有容许三元组。现在我们一般把他们的结论称作为 *Hurwitz-Radon 定理*:

> *三元组 $[r, N, N]$ 是容许的，当且仅当 $r \leq \rho(N)$, 其中 $\rho$ 被称作是 Hurwitz-Radon 函数，其定义如下：当 $N = 2^{4\alpha+\beta}(2\gamma+1)$, $\alpha$, $\beta$, $\gamma$均是自然数（包括零）且 $0 \leq \beta \leq 3$ 时，$\rho(N) = 8\alpha + 2^{\beta}$.*

随后，许多数学家都曾得到过更一般的形如 $[r, s, N]$ 的容许三元组, 参见综述文献 [Sha00] 和它的参考文献。关于这个问题的最新结果，可以参见文献 [Yuz81, Yuz84, LS93, MGO11, LMGO11, HHZ16]. 值得注意的是数学家们试图解决此问题的方法和方向都不大相同。

关于不同的容许三元组之间的优劣性，有一个很简单的判断标准：固定 $r$ 和 $s$, $N$ 自然越小越优；固定 $r$（或 $s$）和 $N$, $s$（或 $r$）自然越大越优。判断

一个三元组是不是最优，是一个相当有挑战性的问题。例如："1，2，4，8 定理"和 Hurwitz-Radon 定理是已知的为数不多的最优的 (optimal) 结果。

还有一个很自然的想法就是：从已知的容许三元组出发，找到一个一般性的构造方式去生成新的容许三元组。这其中就有所谓的*倍增构造法 (doubling construction)*：如果 $[r,s,N]$ 是容许的，那么 $[r+1,2s,2N]$ 也是容许的。关于这个方法的历史可参考 [Sha00, 第0章习题2及第1章的附录]。这个方法是十分高效的，但缺点也很明显——就是不能够连续多次使用，例如，从 $[1,1,1]$ 出发，可以依次得到 $[2,2,2],[3,4,4],[4,8,8]$, 但是后面两个显然不如 $[4,4,4],[8,8,8]$ 更优。

本文的主要贡献在于推广及优化了倍增构造法，使得连续使用倍增构造法也能得相对较优的结果，而且其证明仅用到了初等的矩阵理论。特别地，黄和张两位作者证明了如下的定理：

> *如果已知 $[r,s,N]$ 是容许的，那么对任意的正整数 $m$ 来说，$[r+\rho(2^{m-1}),2^m s,2^m N]$ 也是容许的。这里的 $\rho$ 还是上文所述的 Hurwitz-Radon 函数。*

例如，从 $[r,s,N]$ 出发，可以得到 $[r+1,2s,2N]$, $[r+2,4s,4N]$, $[r+4,8s,8N]$, $[r+8,16s,16N]$, 后面两个结果显然比多次使用最初的倍增构造法要更优。

## References


[HHZ16] Y.-Q. Hu, H.-L. Huang, and C. Zhang. $\mathbb{Z}_2^n$-graded quasialgebras and the Hurwitz problem on compositions of quadratic forms. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 370 (2018), 241-263.

[Hur98] A. Hurwitz. Über die Komposition der quadratischen Formen von beliebig vielen Variablen. *Nahr. Ges. Wiss. Göttingen (Math.-Phys. Kl.)*, pages 309–316, 1898. Reprinted in *Math. Werke*, Bd. 2, Birkhäuser, Basel, pages 565–571, 1963.

[Hur23] A. Hurwitz. Über die Komposition der quadratischen Formen. *Math. Ann.*, 88:1–25, 1923. Reprinted in *Math. Werke*, Bd. 2, Birkhäuser, Basel, pages 641–666, 1963.

[LMGO11] A. Lenzhen, S. Morier-Genoud, and V. Ovsienko. New solutions to the Hurwitz problem on square identities. *J. Pure Appl. Algebra*, 215(12):2903–2911, 2011.

[LS93] T. Y. Lam and T. L. Smith. On Yuzvinsky's monomial pairings. *Quart. J. Math. Oxford Ser. (2)*, 44(174):215–237, 1993.

[MGO11] S. Morier-Genoud and V. Ovsienko. A series of algebras generalizing the octonions and Hurwitz-Radon identity. *Comm. Math. Phys.*, 306(1):83–118, 2011.

[Rad22] J. Radon. Lineare scharen orthogonale Matrizen. *Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg*, 1:1–14, 1922.

[Raj93] A. R. Rajwade. *Squares*, volume 171 of *London Mathematical Society Lecture Note Series*. Cambridge University Press, 1st edition, 1993.

[Sha00] D. Shapiro. *Compositions of quadratic forms*. Walter de Gruyter & Co., Berlin, 2000.

[Yuz81] S. Yuzvinsky. Orthogonal pairings of Euclidean spaces. *Michigan Math. J.*, 28(2):131–145, 1981.

[Yuz84] S. Yuzvinsky. A series of monomial pairings. *Linear Multilinear Algebra*, 15(2):109–119, 1984.