数学研究及评论
Mathematical Research with Reviews
Issue 1 (2019) Art.14

Igusa, Kiyoshi; Liu, Shiping (刘石平); Paquette, Charles
A proof of the strong no loop conjecture
Adv. Math. 228 (2011), no. 5, 2731–2742.

评论员：刘勇 (Auburn University, Auburn, AL, USA)
收稿日期：2019年9月24日

本文在通过巧妙推广Lenzing的工作基础上，肯定地解决了针对某一类阿丁(Artin)代数—代数闭域上的有限维代数—的强无回路(loop)猜想。与此同时，注意到箭图(quiver)代数提供了一大类有趣而实用的阿丁代数，作者将该结果从箭图代数的角度进行了推广，以此回答了人们在代数表示论领域内迫切关心的关于阿丁代数的基本问题：如何知晓一个阿丁代数的整体维数(global dimension)是否有限。粗略地讲，作者证明只要其箭图包含一个循环自由(cyclically free)的定向环路(oriented cycle), 则对应的箭图代数具有无限整体维数。这个结果与无回路猜想遥相呼应：后者断言，若阿丁代数是整体有限维的，则其相应的延拓箭图(extension quiver)没有回路。

本文清晰精致，思路开阔，对具有基本同调代数 [2]与少许结合代数 [1] 知识储备的本科生与研究生来说都不难阅读。并且文章亦为今后的深入研究提供了一些思路与方向，成为一例充分展现代数魅力的典范。

在这里我们简单讨论一下作者的整体思路。留意到，代数闭域上的有限维代数是Morita等价于任意数域k上的有限维初等(elementary)代数的，该代数上任何单模都是在k上的一维向量空间。这将我们的注意力转移到研究阿丁代数的局部情形：例如阿丁代数Λ的局部化$\Lambda_e = \Lambda/\Lambda(1-e)\Lambda$, 以及$\Lambda$上的半单模$S_e = e\Lambda/eJ$, 其中$J$为$\Lambda$的Jacobson根(radical). 另一方面，想要证明在延拓箭图上处

于某顶点的单模(例如S_e)上无回路—即其上仅有平凡自延拓$\mathrm{Ext}^1_\Lambda(S_e,S_e)=0$, 则等价于证明$k$上向量空间$eJe/eJ^2e$是平凡的，参见 [1]中命题1.14. 这意味着探知eJe, 或局部化后的根J的必要性。于是作为映射的迹（trace）以及作为其值域的Hochschild同调群$\mathrm{HH}_0(\Lambda)$起到了至关重要的作用，这也是作者定义并开发迹的局部版本的主要原因，即tr_e与$\mathrm{HH}_0(\Lambda_e)$. 事实上，作者在文中定理1.6里证明$\mathrm{HH}_0(\Lambda_e)$是根平凡的，即$J_e\subseteq[\Lambda_e,\Lambda_e]$; 特别的，我们有$eJe+\Lambda(1-e)\Lambda\subseteq[\Lambda_e,\Lambda_e]$.

本文使用了一半的篇幅将迹平行推广到局部情形，可以看作是经典同调代数应用的范本，其中囊括了为人熟识的模映射在投射模分解(projective resolution)上的提升引理，五引理以及马蹄引理等。具体地讲，给定阿丁代数Λ以及其上的有限生成投射模P与它的自同态φ. 因P可以分解为直和$P=e_1\Lambda\oplus\cdots\oplus e_r\Lambda$, 其中$e_i$为$\Lambda$中的主幂等元(primitive idempotent), 可以定义迹为

$$\mathrm{tr}(\varphi)=\sum_{i=1}^{r}a_{ii}+[\Lambda,\Lambda]\in\mathrm{HH}_0(\Lambda),$$

这里$a_{ij}\in e_i\Lambda e_j$且 $\mathrm{HH}_0(\Lambda)=\Lambda/[\Lambda,\Lambda]$为$\Lambda$的交换化。然而对于普通模$M$，如果不强加有限投射维数（projective dimension）的条件，这个定义将失效。

与此平行的，作者考虑在某一个幂等元e处的局部化，自然投射$\Lambda\to\Lambda_e$将诱导同调群之间的同态$H_e:\mathrm{HH}_0(\Lambda)\to\mathrm{HH}_0(\Lambda_e)$。于是定义$e$-迹（$e$-trace）为其下的象

$$\mathrm{tr}_e(\varphi)=H_e(\mathrm{tr}(\varphi))\in\mathrm{HH}_0(\Lambda_e).$$

自然的，我们会询问e-迹是否也可以对一般的模M定义，它是否有如先前定义的迹类似的基本性质等，作者对此都做了一一解答。例如，若半单模S_e具有有限嵌入维数(injective dimension), 则可充分地保证e-迹具有良好的性质。特别的，当该幂等元退化成单位元时，且代数Λ是有限整体维的，我们将得到Lenzing的结果。由此可见，e-迹是容纳经典结果的自然推广。

除此之外，本文采用了三个具体箭图代数的例子使之图文并茂，让读者对相应的三个主要结果可把玩于手，了然于心，印象深刻。文末作者提及相关的极无回路猜想(extreme no loop conjecture), 以供有兴趣的读者作更深入的研究：对于任何阿丁代数Λ上的单模S, 若在对应的延拓箭图上该顶点有回路—存在非平凡的自延拓$\mathrm{Ext}^1_\Lambda(S,S)\neq 0$, 则该顶点上有无穷个高维回路，即有无限个正整数$i$使得$\mathrm{Ext}^i_\Lambda(S,S)\neq 0$.

References

[1] M. Auslander, I. Reiten, S.O. Smalo, Representation Theory of Artin Algebras, Cambridge Stud. Adv. Math., vol 36, Cambridge University Press, Cambridge, 1995.

[2] C. Weibel: An Introduction to Homological Algebra, Cambridge Stud. Adv. Math., vol. 38, Cambridge University Press, Cambridge, 1994.