数学研究及评论

Mathematical Research with Reviews

Issue 1 (2019) Art.13

Fang, Fuquan (方复全); Grove, Karsten; Thorbergsson, Gudlaugur

Tits geometry and positive curvature

Acta Math. 218 (2017), no. 1, 1–53.

评论员：李刚（山东大学，济南）

收稿日期：2019年9月23日

具有正的截面曲率的紧致无边流形，是非常有意思的一类流形，其研究在黎曼几何中具有重要地位。常见例子有n维标准球面S^n，赋予Fubini-Study度量的二维复射影平面CP^2, 标准球面的乘积空间$S^2 \times S^2$等等。这类流形有比较好的几何和拓扑性质如：大家耳熟能详的直径下界估计，有限基本群定理，Synge定理，拓扑（微分）球面定理(sphere theorem)等。条件略微放宽，具有非负截面曲率的单连通完备非紧流形上的灵魂定理(soul theorem)是非负截面曲率对流形整体结构的有力控制。这类流形的研究，很大一部分方法往往不是通过求解偏微分方程的思路展开的(当然，R. Hamilton, S. Brendle-R. Schoen仍能够用热流的一种–Ricci flow在其拓扑结构研究中取得重大进展)，通常黎曼几何的这个研究领域被放在度量几何(metric geometry)中。

关于正截面曲率流形的分类问题，已经走了很长的路。现在还没有完全解决。三维正截面曲率(甚至正的Ricci曲率)流形微分结构分类已经确定，可参见Hamilton的文章。其他维数尚未解决。四维流形有著名的尚未解决的困难猜想*(Hopf conjecture): $S^2 \times S^2$ 上不存在具有正的截面曲率的度量。* 高维情形更多是利用对称性(如：群作用)比较成批地构造具有正的截面曲率的度量的例子(通常构造这样的例子很不平凡)，专家有K. Grove, W. Ziller等人。

因为本评论员不是该研究领域直接专家，下面的评论部分地参阅了Lee T. Kennard教授在MathSciNet对该文的评价。

这篇文章是该领域的重要进展。这里不是继续构造新的例子，而是给出正截面曲率流形上存在某些对称性(群作用)的刚性刻划，或者说：搞清了具有某类对称性的正的截面曲率流形所具有的新的障碍。这为K. Grove提出的通过对称性来研究正的截面曲率流形这一计划(参见[Gr, Zi])提供了重要看法。

这里对称性是对齐性空间和cohomogeneity-one 流形等的更一般的推广。我们称(M, g)上一个等距群(G)作用为*polar actions*: 指存在一个浸入子流形$N \subset M$, 使得N与群作用的任一轨道都垂直相交。这里N称为一个*section.* 如Lie群G为紧群时，特例如：N为一点时，M为齐性G-流形；N维数为1时，这是cohomogeneity one的作用。紧李群到自身的共轭作用是polar的，这里section是一个极大圆环(torus). 其往一般流形上的推广已被前人研究。cohomogeneity one 的正截面曲率流形这里称为例外情形，已由 [GWZ], [Ve]研究。

正截面曲率齐性空间已于1970年代被Wallach和 Bérard-Bergery分类。除去七维情形，Cohomogeneity one的正截面曲率流形于2000年代被Grove, Verdiani, Wilking 和 Ziller等分类 [GWZ, Ve]. 这其中包含了Eschenburg和Bazaĭkin的甚至在同伦等价意义下非齐性的例子。作为分类遗留下的问题，仍有两个无穷族的cohomogeneity one的流形尚未被证实其上存在正截面曲率度量(作为20年内的唯一进展，Dearicott [De] 和Grove-Verdiani-Ziller [GVZ] 证实其中一族存在正截面曲率度量)。

作为对比，本文证明具有cohomogeneity two的polar actions的流形具有很强的限制（刚性）：

定理 1. *Cohomogeneity at least two的单连通闭流形上的polar action equivariantly 微分同胚于rank-*1*的紧致对称空间上的polar action (后者已分类).*

主定理的证明用到了Tits几何中的spherical buildings理论。证明分为两步。作者先证明这样的polar群是Coxter群或$\mathbb{Z}_2$ quotient, 对应的section则equivariantly 微分同胚于球面或者其上存在线性作用的实射影空间；然后作者将(M, G)关联到Tits意义下的M型chamber系统，且证明比较好的情形下chamber系统的万有覆叠是spherical building, 用之得到万有覆叠的分类，进而由Grove和Ziller[GZ]得到所需分类。更一般情形的讨论参见[FGT].

References

[De] O. Dearricott, A 7-manifold with positive curvature, *Duke Math. J.* **158** (2011), 307-346.

[FGT] F. Fang, K. Grove and G. Thorbergsson, Rank Three Geometry and Positive Curvature, *Comm. Anal. Geom*, **24** (2016), 487–520.

[Gr] K. Grove, A panoramic glimpse of manifolds with sectional curvature bounded from below, *Algebra i Analiz*, **29** (2017), 7-48. Reprinted in *St. Petersburg Math. J.* **29** (2018), 3-31.

[GVZ] K. Grove, L. Verdiani and W. Ziller, An exotic T_1S^4 with positive curvature, *Geom. Funct. Anal.* **21** (2011), 499–524.

[GWZ] K. Grove, B. Wilking and W. Ziller, Positively curved cohomogeneity one manifolds and 3-Sasakian geometry, *J. Differential Geom.* **78** (2008), 33–111.

[GZ] K. Grove and W. Ziller, Polar Actions and Manifolds, *J. Fixed Point Theory Appl.* **11** (2012), 279–313.

[Ve] L. Verdiani, Cohomogeneity one manifolds of even dimension with strictly positive sectional curvature, *J. Differential Geom.*, **68** (2004), 31–72.

[Zi] W. Ziller, Riemannian manifolds with positive sectional curvature, 1–19, in *Geometry of manifolds with non-negative sectional curvature*. Lecture Notes in Math., 2110, Springer, Cham, 2014.