数学研究及评论

Mathematical Research with Reviews

Issue 1 (2019) Art.12

Gao, Alice L. L. (郜璐璐); Xie, Matthew H. Y.; Yang, Arthur L. B. (杨立波)

Schur positivity and log-concavity related to longest increasing subsequences

Discrete Math. 342 (2019), no. 9, 2570–2578.

评论员：邱敦（北京交通大学，北京）

收稿日期：2019年9月22日

对于任一正整数n，记$\mathfrak{S}_n$为所有长度为n的置换的集合。对任意$\pi \in \mathfrak{S}_n$，令$\mathrm{is}(\pi)$ 表示π中最长单增子序列的长度，并且令$L_{n,k}$表示$\mathfrak{S}_n$中最长单增子序列长度为k的置换的集合，$\ell_{n,k} = |L_{n,k}|$. 陈永川 [1] 提出猜想：固定n，$\ell_{n,k}$是log-concave的(即$\ell_{n,k}^2 > \ell_{n,k+1}\ell_{n,k-1}$).

Bóna, Lackner和Sagan [2] 提出了此猜想在involution置换集合的类比猜想，引入了统计量$i_{n,k}$, 并证明了两猜想的等价性。此外，根据Robinson-Schensted correspondence（RSK算法），Bóna, Lackner和Sagan [2] 对两个猜想做了细分改进。令$\mathrm{sh}(\pi)$表示在RSK算法下置换π对应的分拆。对于正整数$n, k(1 \le k \le n)$和一个由一些n的分拆组成的集合Λ, 令

$$L_{n,k}^{\Lambda} = \{\pi \in \mathcal{L}_{n,k} | \mathrm{sh}(\pi) \in \Lambda\}, \quad \ell_{n,k}^{\Lambda} = |L_{n,k}^{\Lambda}|,$$

同理他们也引入了$i_{n,k}^{\lambda}$。他们证明了当Λ为某些特定集合时$\ell_{n,k}^{\Lambda}$和$i_{n,k}^{\lambda}$的log-concave性质。

本文的作者在对RSK算法的理解下推广了Chen和Bóna, Lackner, Sagan的猜想。令f^{λ}表示形状为λ的标准杨表的个数，则根据RSK算法，

$$f^{\lambda} = \Big|\{\pi | \pi^2 = id \text{ and } \mathrm{sh}(\pi) = \lambda\}\Big| = \sum_{k=1}^{n} i_{n,k}^{\lambda}.$$

这样，原本关于involution的猜想推广到了样表计数上。本文的主要定理为：

定理 1. 对任意正整数m,n,

(1) 对任意$\lceil \frac{n}{2} \rceil < k < n$,

$$(f^{(k^m,(n-k)^m)})^2 \geq f^{(k^m,(n-k-1)^m)} f^{(k^m,(n-k+1)^m)}.$$

(2) 对任意$1 < k < n$,

$$(f^{(k^m,1^{m(n-k)})})^2 \geq f^{(k^m,1^{m(n-k-1)})} f^{(k^m,1^{m(n-k+1)})}.$$

作者给出了以上定理的两个证明。第一个证明为直接计算。利用f^λ的hook length公式，展开不等式两侧对比化简得到。证明计算比较复杂，巧妙地运用了二项式系数化简技巧，思路清晰，方法直接。

本文对定理的第二个证明是本文的核心。作者根据杨表和Schur函数的关系，将猜想推广到对称函数上，证明了定理一的以下推广：

定理 2. 对任意正整数m,n,

(1) 对任意$\lceil \frac{n}{2} \rceil < k < n$,

$$(s^{(k^m,(n-k)^m)})^2 - s^{(k^m,(n-k-1)^m)} s^{(k^m,(n-k+1)^m)}$$

有正的*Schur*函数展开式。

(2) 对任意$1 < k < n$,

$$(s^{(k^m,1^{m(n-k)})})^2 - s^{(k^m,1^{m(n-k-1)})} s^{(k^m,1^{m(n-k+1)})}$$

有正的*Schur*函数展开式。

此定理的证明应用了Lam, Postnikov和Pylyavskyy [3] 的定理，更为简洁。事实上定理二作为定理一的推广，不仅将问题带到对称函数、表示论等更广的数学科学领域，还引出了一系列新的关于对称函数log-concave的开放问题，例如文中作者提出的$f_{n,k} = \sum_{\lambda \vdash n, \lambda_1 = k} s_\lambda^2$和$f_{n,k} = \sum_{\lambda \vdash n, \lambda_1 = k} s_\lambda$的log-concave的猜想，也将成为近期计数组合学和代数组合学中关注的热门问题。

References

[1] W.Y.C. Chen, Log-concavity and q-log-convexity conjectures on the longest increasing subsequences of permutations, arXiv:0806.3392.

[2] M. Bóna, M.-L. Lackner, B.E. Sagan, Longest increasing subsequences and log concavity, *Ann. Comb.* **21** (2017) 535–549.

[3] T. Lam, A. Postnikov, P. Pylyavskyy, Schur positivity and Schur log-concavity, *Amer. J. Math.* **129** (2007) 1611–1622.