数学研究及评论
Mathematical Research with Reviews
Issue 1 (2019) Art.1

William Y. C. Chen (陈永川), Donna Q. J. Dou (窦全杰), and Arthur L. B. Yang (杨立波)
Brändén's Conjectures on the Boros-Moll Polynomials
Int. Math. Res. Not. IMRN 2013, no. 20, 4819–4828.

评论员：马修 (Waterloo, ON, Canada. Email: MathieuComment@hotmail.com)
收稿日期：2019年8月9日

在这篇出色的文章中，作者们解决了瑞士学者Brändén提出的关于实根多项式（即零点为实数的多项式）的两个猜想。 Brändén在文章 [1]中猜测以下两个多项式的零点全为实数

$$Q_n(x) = \sum_{i=0}^{n} \frac{d_i(n)}{i!} x^i, \qquad R_n(x) = \sum_{i=0}^{n} \frac{d_i(n)}{(i+2)!} x^i, \qquad n \geq 1$$

其中$d_i(n)$是来自Boros-Moll多项式

$$P_n(x) = 2^{-2n} \sum_{j} 2^j \binom{2n-2j}{n-j} \binom{n+j}{j} (x+1)^j$$

展开式中x^i的系数。$\{d_i(n)\}_{i=0}^{n}$ 也被称作Boros–Moll序列。值得一提的是，Boros-Moll多项式的零点并不都是实数。 Boros-Moll多项式产生于一个奇特的四次积分

$$\int_0^{\infty} \frac{1}{(t^4 + 2xt + 1)^{n+1}}\, dt.$$

关于这个积分的故事以及它所引发的许多有意思的现象读者可参考[4]，特别是Boros–Moll序列为无穷对数凹(infinitely log-concave)的猜测（称为 Boros-Moll猜测）至今未解决[3]。上述Brändén猜想的提出正是为了更好地理解Boros-Moll猜

测。随着Brändén猜想的解决，人们朝Boros-Moll猜测的解决更近了一步(确切地说是证明了Boros–Moll序列为3-对数凹)。

一个标准多项式序列$\{f_n(x)\}_{n\geq 1}$称为一个Sturm序列，如果$f_n(x)$是零点全为实数的n次多项式且$f_n(x)$的零点与$f_{n+1}(x)$的零点交错。

为证明Brändén猜想，作者们其实证明了一个更强的结论，即$\{Q_n(x)\}_{n\geq 1}$与$\{R_n(x)\}_{n\geq 1}$都是Sturm序列。

作者们主要用到的理论工具来自[2]。对于有递归关系的多项式序列，[2, Corollary 2.4]给出了一个很有效的判断Sturm序列的条件。于是剩下的工作就是寻找多项式$\{Q_n(x)\}_{n\geq 1}$之间的递归关系，以及多项式$\{R_n(x)\}_{n\geq 1}$之间的递归关系。

References

[1] Brändén, P. "Iterated sequences and the geometry of zeros." Journal für die Reine und Angewandte Mathematik 658 (2011): 115–31.

[2] Liu, L. L. and Wang, Y. "A unified approach to polynomial sequences with only real zeros." Advances in AppliedI Mathematics 38, no. 4 (2007): 542–60.

[3] McNamara, P. B. W. and Sagan, B. E. "Infinite log-concavity: Developments and conjectures." Advances in Applied Mathematics 44, no. 1 (2010): 1–15.

[4] Moll, V. H. "The evaluation of integrals: A personal story." Notices of the American Mathematical Society 49, no. 3 (2002): 311–7.